|  |
| --- |
| **Niveau :** terminale spécialité physique chimie |
| **Type de ressources :** exercices types et approfondissement |
| **Notions et contenus :**   * Modèle du circuit RC série : charge d’un condensateur par une source idéale de tension, décharge d’un condensateur, temps caractéristique. * Capacité thermique d’un système incompressible. Énergie interne d’un système incompressible. * Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l’évolution de la température d’un système au contact d’un thermostat. |
| **Capacités travaillées ou évaluées :**   * Citer des ordres de grandeur de valeurs de capacités usuelles. * Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d’un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge. * **Capacité mathématique :** Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant. * Exploiter l’expression de la variation d’énergie interne d’un système incompressible en fonction de sa capacité thermique et de la variation de sa température pour effectuer un bilan énergétique. * Caractériser qualitativement les trois modes de transfert thermique : conduction, convection, rayonnement. * Exploiter la relation entre flux thermique, résistance thermique et écart de température, l’expression de la résistance thermique étant donnée. * Effectuer un bilan d’énergie pour un système incompressible échangeant de l’énergie par un transfert thermique modélisé à l’aide de la loi de Newton fournie. Établir l’expression de la température du système en fonction du temps. |
| **Nature de l’activité :** exercices types et approfondissement |
| **Résumé :** cette activité revient sur l’établissement et la résolution des équations différentielles du premier ordre à coefficients et second membre au programme de terminale spécialité. Elles permettent de réaliser des liens entre les grandeurs électriques et les grandeurs thermodynamiques. |
| **Mots clefs** **:** équation différentielle du premier ordre à coefficients et second membre constants : charge et décharge d’un condensateur dans un circuit RC ; évolution de la température d’un système incompressible au contact d’un thermostat |
| **Académie où a été produite la ressource :** Strasbourg |

Physique-chimie

Programme de la classe de terminale spécialité

**Documents élèves**

**Voir ci après**

Équation différentielle - analogie thermodynamique et électricité

Document 1 : résolution d’une équation différentielle du premier ordre à coefficients et second membre constants d’une équation différentielle du premier ordre à coefficients et second membre constants peut se mettre sous la forme :

*où y(t) est une variable dépendante du temps*

ayant la même dimension que y(t), la constante a la dimension d’une durée. C’est un **temps caractéristique du système.**

est une constante correspondant à la valeur que prendra y(t) au bout d’un temps « infini », correspondant au **régime stationnaire.**

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

*avec y(0) la valeur de y(t) à l’origine des dates*

1. **Analogie décharge condensateur et refroidissement d’un système au contact d’un thermostat**

A. Décharge d’un condensateur

Un condensateur de capacité C, initialement chargé, et placé dans le circuit électrique suivant :

R

uR(t)

+

+

+

+

+

+

q

C

-

-

-

-

-

-

uc(t)

- q

A t = 0, on ferme le circuit. La tension aux bornes du condensateur vaut initialement uc(0) = E

1. À l’aide d’une loi des mailles, établir l’équation différentielle vérifiée par uc(t). Identifier la constante de temps et la valeur de cette tension en régime stationnaire.
2. En déduire l’expression de la tension uc(t).
3. La courbe uc=f(t) est donnée ci-dessous. Identifier sur la courbe un régime dit « transitoire » et le régime dit « stationnaire ».

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

1. Estimer la durée du régime transitoire. Commenter sachant que le temps de réaction d’un humain est de l’ordre de la seconde.

*On prendra des valeurs usuelles de résistances et de capacité : R ≈ 1000Ω et C ≈ 1μF*

Une image contenant alcool, verre

Description générée automatiquementB. Refroidissement d’une boisson

On cherche à déterminer la fonction mathématique décrivant l’évolution temporelle de la température d’une boisson chaude, initialement à la température T0, placée au contact d’un thermostat de température Text < T0.

On considère le système {boisson} supposé incompressible.

1. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système boisson. Préciser le signe du transfertthermique
2. En introduisant le flux thermique Φ, choisi comme étant positif, établir une relation entre la variation d’énergie interne ∆U entre les dates t et t+∆t et le flux thermique Φ.

Le système {boisson} a une capacité thermique CTH et la résistance thermique du système sera noté RTH.

1. La durée ∆t est suffisamment faible pour considérer que le flux thermique est constant durant celle-ci. En déduire la relation suivante :

Données :

* On appelle capacité thermique le produit de la capacité thermique massique et de la masse du système : CTH = m x cTH
* On rappelle la relation entre le flux thermique , la résistance thermique RTH et l’écart de température entre la boisson et le thermostat.

1. Montrer que si ∆t tend vers zéro, alors la température du système vérifie une équation différentielle du type :

Identifier chaque terme. Commenter.

1. En déduire la fonction T(t).
2. La courbe T=f(t) est donnée ci-dessous. Identifier sur la courbe la température initiale T0, la température extérieure Text ainsi que le régime dit « transitoire » et le régime dit « stationnaire ».

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

1. Donner un ordre de grandeur du temps de refroidissement du système. Commenter.

Données :

RTH ≈ 0,1 W.K-1

CTH ≈ 103 J/kg

1. Présenter les analogies possibles entre les grandeurs électriques et les grandeurs de la thermodynamique en complétant le tableau ci-dessous.

|  |  |
| --- | --- |
| En électricité | En thermodynamique |
| Potentiel électrique\* | Température |
| Résistance électrique |  |
| Capacité |  |
| Intensité du courant électrique |  |
| Charge électrique |  |

*\*On rappelle qu’une tension électrique est une différence de potentiels électriques. Ainsi, UAB = VA - VB*

**II. Analogie charge d’un condensateur et chauffage d’un système incompressible**

A. Charge d’un condensateur

Un condensateur initialement déchargé est placé dans le circuit suivant.

R

C

E

uR(t)

uc(t)

A t = 0, on ferme le circuit.

1. À l’aide d’une loi des mailles, établir l’équation différentielle vérifiée par uc(t). Identifier la constante de temps et la valeur de cette tension en régime stationnaire.
2. En déduire l’expression de la tension uc(t).
3. La courbe uc=f(t) est donnée ci-dessous. Identifier sur la courbe un régime dit « transitoire » et le régime dit « stationnaire ».

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

E

E

E

E

1. Estimer la durée du régime transitoire.

*On prendra des valeurs usuelles de résistances et de capacité : R ≈ 1000Ω et C ≈ 1μF*

B. Chauffage de l’eau dans une bouilloire

Une bouilloire contient de l’eau initialement à une température T(0) = T0.

A t = 0, l’appareil commence à chauffer l’eau grâce à une résistance électrique R en contact avec l’eau. On notera P la puissance thermique dissipée par la résistance électrique R.

On considère le système {eau} supposé incompressible et on notera RTH la résistance thermique des parois du système.

La bouilloire est défectueuse car l’eau n’atteint jamais la température d’ébullition et reste liquide durant toute l’expérience.

1. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système. Préciser le signe des deux transferts thermiques.
2. Exprimer la variation d’énergie interne du système entre l’instant t et l’instant t + ∆t en fonction de P, RTH, Text et T(t).

Le système {eau} a une capacité thermique CTH.

1. La durée ∆t est suffisamment faible pour considérer que le flux thermique est constant durant celle-ci. En déduire la relation suivante :
2. Montrer que si ∆t tend vers zéro, alors la température du système vérifie une équation différentielle du type :

Identifier chaque terme. Commenter.

1. En déduire la fonction T(t) en fonction de T0, T∞ et .
2. La courbe T=f(t) est donnée ci-dessous. Identifier le régime dit « transitoire » et le régime dit « stationnaire ».

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

𝛕

**Pour le professeur (mise œuvre, éléments de correction, ...)**

Avant-propos

Le programme de terminale spécialité aborde les équations différentielles du premier ordre à second membre constant dans différents domaines de la physique chimie dont l’électricité et la thermodynamique.

Une première chose à relever est que les élèves n’ont pas tous le même niveau de connaissances en mathématiques : certains ayant fait le choix de ne pas poursuivre cet enseignement en terminale quand d’autres ne le poursuivraient peut-être déjà pas en première. Devant une telle hétérogénéité, il peut être intéressant de limiter les démonstrations trop abstraites, de mettre davantage l’accent sur le sens physique des équations et de faire des parallèles entre les différents domaines de la physique.

L’objectif de la ressource « équation différentielle et analogie électricité-thermodynamique » est clairement celui-ci.

Dans la ressource qui suit, l’utilisation de la résistance thermique d’un système RTH et de la capacité thermique CTH = mc permettra d’établir le lien entre le refroidissement d’une boisson et la décharge d’un condensateur, et également celui entre le chauffage d’une eau et la charge d’un condensateur.

Choix d’approche :

* **Résolution d’une équation différentielle du premier ordre à coefficients et second membre constant**

Le choix a été fait de ne pas demander aux élèves de résoudre mathématiquement les équations différentielles en faisant la somme de l’équation homogène et de la solution particulière. Ainsi, l’équation différentielle sera écrite sous la forme :

Il est alors aisé d’identifier la constante et d’en déduire qu’elle est homogène à une durée. On peut également identifier la solution particulière correspondant au régime stationnaire. Ainsi, dès l’établissement de l’équation différentielle, on peut discuter du sens et de la cohérence des constantes qui y figurent.

La solution de cette équation :

*moyen mnémotechnique (début – fin) + fin*

permet là aussi de distinguer la partie correspondant au régime transitoire (en facteur de l’exponentielle) de celle correspondant au régime stationnaire.

* **Un flux non algébrisé**

L’algébrisation des transferts thermiques fait sens : elle permet de n’avoir que des sommes dans l’expression du premier principe. L’élève doit alors être capable de prévoir le sens du transfert thermique et donc son signe. En revanche, le flux thermique n’est pas toujours algébrisé dans les ouvrages. Ainsi, le choix (discutable) a été fait de noter Φ la valeur absolue du flux dans les exercices.

* **Un flux en fonction de la résistance thermique**

Le programme stipule dans les capacités exigibles que l’élève doit être capable d’*« Effectuer un bilan d’énergie pour un système incompressible échangeant de l’énergie par un transfert thermique modélisé à l’aide de la loi de Newton fournie. Établir l’expression de la température du système en fonction du temps. »*

Ainsi, l’expression du flux thermique entre le système et l’extérieur, considéré comme un thermostat, à utiliser est la suivante :

Néanmoins, pour simplifier l’analogie entre électricité et thermodynamique il est utile d’utiliser l’expression du flux utilisant la résistance thermique déjà vue lors de l’étude du phénomène de conduction.

Afin de faire du lien entre les expressions, il peut être utile de préciser que si le transfert thermique est purement convectif, conformément à la loi phénoménologique de Newton. S’il est purement conductif . Dans le cas général il est nécessaire de calculer une résistance équivalente. C’est cette résistance équivalente qui est donnée dans les exercices de la ressource.

Compléments :

* Notons que ces exercices permettent de mettre en évidence la durée importante des temps de relaxation thermique. Celle-ci sera très importante dans les études supérieures afin que la notion de transformations quasi-statiques fassent sens.
* L’analogie entre le traitement d’un problème de thermodynamique et un problème d’électricité a donné lieu à la thermocinétique.

Pour plus d’informations : *« La thermodynamique en prépa et à l’agrégation – Outils mathématiques de la physique – Compléments de cours X-ENS » de Thierry Meyer aux éditions ELLIPSES.*

Correction des exercices

I.A. Décharge d’un condensateur

1. D’après la loi des mailles : uc(t) + uR(t) = 0

Or, *avec q la charge portée par une armature du condensateur*.

D’où

Par identification, = RC et => le condensateur est bien en décharge.

1. Et 3)

|  |  |
| --- | --- |
| La solution est de la forme : | Régime stationnaire  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  E |

Régime transitoire

1. On remarque que

* Le régime transitoire dure environ 5, soit 5 x R x C = 5 x 1000 x 10-6 = 5.10-3 s = 5 ms

Cette durée est imperceptible à l’échelle humaine : l’étude du régime transitoire se fera souvent via une acquisition informatique.

Commentaires physiques sur = R x C

La constante de temps augmente lorsque la résistance augmente => cohérent : plus R est grand, plus le débit de charge est faible et plus le temps de décharge sera long.

La constante de temps augmente lorsque la capacité augmente => cohérent : pour une même tension, plus la charge portée par une armature est grande, plus il faut de temps pour la décharger.

I.B. Refroidissement d’une boisson

Or, l’énergie cinétique macroscopique est constamment nulle et aucune force ne travaille :

Avec Q < 0 car le transfert thermique se fait du système (chaud) vers l’extérieur (froid)



et

D’où



Par identification :

T∞ = Text => cohérent : au bout d’un temps infini, la température de la boisson est égale à celle de l’extérieur.

= RTH CTH => cohérent : plus la résistance thermique du système est grande, plus il faudra de temps pour le refroidir.

Plus la capacité thermique du système est grande, plus l’énergie interne initiale du système est grande et donc plus il faudra de temps pour le refroidir.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. La solution est de la forme :   Ci-contre, T0 = 90°C  et Text = 20°C. | 6)  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  Régime stationnaire |

Régime transitoire

1. La durée de refroidissement est assimilable à la durée du régime transitoire, soit   
   5 = 5 x RTH x CTH = 5 x 0,1 x 103 = 500 s = 8min 20 s.

On peut constater que la durée du régime transitoire en thermodynamique est perceptible à l’échelle humaine. Pour fixer les idées, on peut fixer des ordres de grandeurs typiques : quelques millisecondes pour un circuit RC et la dizaine de minutes pour un refroidissement de boisson.

1. Comparatif électricité thermodynamique

|  |  |
| --- | --- |
| En électricité | En thermodynamique |
| Potentiel électrique | Température |
| Résistance électrique | Résistance thermique |
| Capacité | Capacité thermique |
| Intensité du courant électrique | Flux thermique |
| Charge électrique | Énergie |

II.A Charge d’un condensateur

1. D’après la loi des mailles : uc(t) + uR(t) - E= 0 d’où : uc(t) + uR(t) = E

Or, *avec q la charge portée par une armature du condensateur*.

D’où

Par identification, = RC et => le condensateur est bien en charge

|  |  |
| --- | --- |
| La solution est de la forme : | E  E  E  E  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  Régime stationnaire |

Régime transitoire

1. On remarque que

Ainsi, le régime transitoire est terminé à 99% au bout d’une durée égale à 5

Ici : 5 = 5 x RC = 5 ms

II.B. Bouilloire

Or, l’énergie cinétique macroscopique est constamment nulle et aucune force ne travaille :

De plus, deux transferts thermiques sont à prendre en compte :

Qeau→ext : le transfert thermique du système vers l’extérieur, correspond aux pertes => Qeau→ext < 0

Qrésistance→eau: le transfert thermique reçu de la part de la résistance de la bouilloire => Qrésistance→eau> 0

D’où :



D’où



Par identification :

T∞ = Text+PRTH => cohérent : plus la puissance thermique fourni par la résistance de la bouilloire est grande, plus la température finale sera élevée. Plus la résistance thermique du système sera grande (système mieux isolé, donc moins de pertes) plus la température finale sera grande. On retrouve aussi que si P = 0 alors T∞ = Text

= RTH CTH => cohérent : pour une même résistance RTH, plus la capacité thermique de la boisson sera grande, plus le temps de chauffage sera important.

1. Et 6)

Régime transitoire

|  |  |
| --- | --- |
| La solution est de la forme :  *Ci-contre un exemple où*  *T0= 20°C*  *T∞ = 60°C* | 𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  𝛕  Régime stationnaire |