

Sept récipients pour un même volume

R. Gauthier

A la suite de la visite de l'exposition "Horizons mathématiques" (Journées A.P.M.E.P. en 1984), nous avons imaginé des activités possibles pour des élèves du Second Cycle.

Voici sept récipients de même hauteur et de même capacité (voir desin Annexe I). On peut choisir par exemple $h=1$ m.

Les volumes (2) et (3) sont composés de deux cylindres de même hauteur ; le rayon du grand est le double du rayon du petit cylindre. Pour le sablier (6) on a deux cônes de même hauteur. Chacun des récipients peut être rempli (d'eau, de Coca-Cola ou de Beaujolais...) par le haut.

Ces conventions étant faites, deux activités nous semblent possibles.

Activité I : Fournir les dessins avec les conventions ci-dessus.

Question unique : Fabriquer une jauge pour chaque récipient, sous la forme d'une règle à graduer, indiquant la quantité de liquide, en litres, contenue dans le récipient. On suppose qu'une telle jauge peut être introduite par le haut pour chaque récipient.

Sous cette forme, la question est difficile : il s'agit d'exprimer le volume, en litres, du contenu en fonction de la hauteur h (en dm).

Des problèmes vont se poser : le professeur pourra aider les élèves à trouver l'ordre dans lequel ces problèmes pourront peu à peu être résolus, en apportant des informations souhaitables ou en suggérant de chercher ces informations (encyclopédies, etc.).

Quelques-uns de ces problèmes :

- Quel est le volume commun ? (voir la sphère (7)).
- Trouver les dimensions qui manquent pour les autres.
- Trouver les bonnes formules pour calculer les volumes (tronc de cône, calotte sphérique, etc.).
- Organiser les calculs (calculatrice, ordinateur).
- Graduer les jauges.

(Voir réponses en annexe V).

Activité II

On présente les dessins de l'annexe I et les conventions. On fournit :

- les courbes donnant le volume du liquide (en litres) en fonction de la hauteur (en dm) (annexe II) ;
- les formules dans le désordre $V = f(h)$ (annexe III) ;
- six tableaux donnant les valeurs de V en fonction de h (annexe IV) (également en désordre).

Question : Qui va avec qui ?

Ces activités peuvent être proposées à une classe entière, des groupes d'élèves, un club de math.

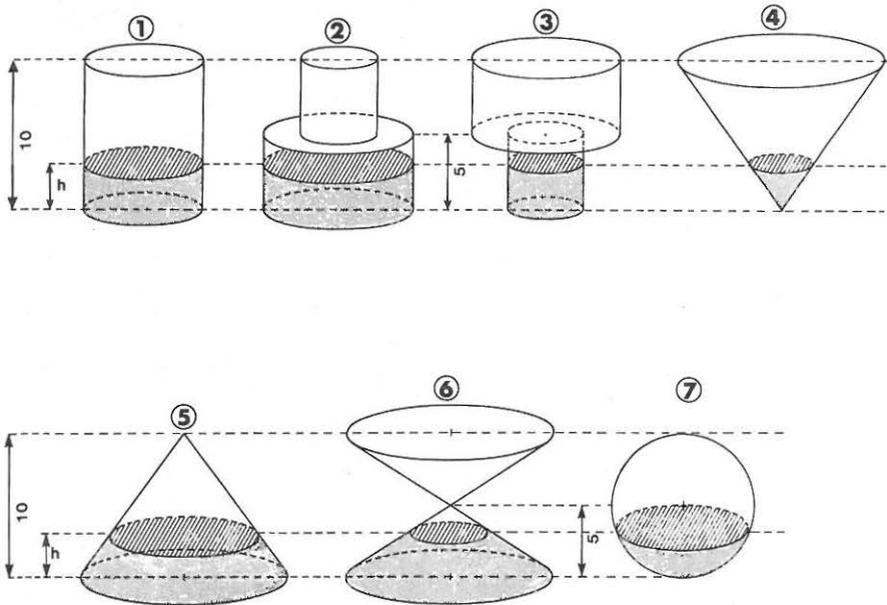
Pour l'activité II, les mêmes problèmes vont se poser sous des formes sans doute différentes.

Utilisation possible

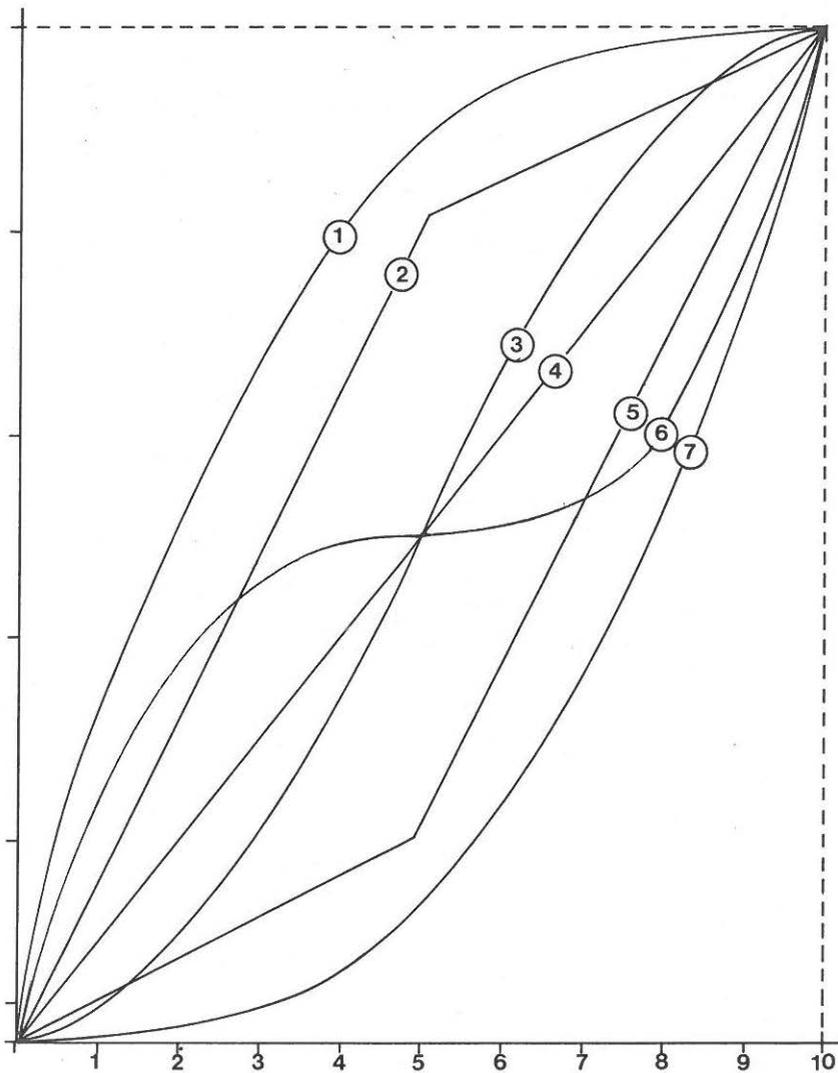
- En seconde :
 - calculs de volumes, représentations graphiques, taux de variation, résolutions d'équations avec ou sans graphiques.
- En Première ou Terminale :
 - lien entre fonction et courbe
 - rapidité de croissance
 - dérivée et tangente à la courbe
 - équation.

... Et pour la formation scientifique, divers procédés de "représentation" d'un phénomène.

ANNEXE I



ANNEXE II



ANNEXE III
Volume de liquide en fonction de la hauteur h

I	$v(h) = \frac{1}{6} \pi h^3$
II	$v(h) = 5\pi h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$
III	$v(h) = \frac{50}{3} \pi h$
IV	$\begin{cases} h \leq 5 & v(h) = \frac{80}{3} \pi h \\ h > 5 & v(h) = 100\pi + \frac{20}{3} \pi h \end{cases}$
V	$v(h) = \frac{\pi}{6} (h^3 - 30h^2 + 300h)$
VI	$v(h) = \frac{250}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi (5 - h)^3$
VII	$\begin{cases} h \leq 5 & v(h) = \frac{20}{3} \pi h \\ h > 5 & v(h) = \frac{80}{3} \pi h - 100\pi \end{cases}$

ANNEXE IV
Six tableaux de valeurs (sur 7)

A

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=3.79609
H=1	F(H)=14.6608
H=1.5	F(H)=31.8086
H=2	F(H)=54.4543
H=2.5	F(H)=81.8123
H=3	F(H)=113.097
H=3.5	F(H)=147.524
H=4	F(H)=184.307
H=4.5	F(H)=222.66
H=5	F(H)=261.799
H=5.5	F(H)=300.938
H=6	F(H)=339.292
H=6.5	F(H)=376.075
H=7	F(H)=410.501
H=7.5	F(H)=441.786
H=8	F(H)=469.144
H=8.5	F(H)=491.79
H=9	F(H)=508.938
H=9.5	F(H)=519.803
H=10	F(H)=523.599

B

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=70.9476
H=1	F(H)=127.758
H=1.5	F(H)=172.002
H=2	F(H)=205.251
H=2.5	F(H)=229.074
H=3	F(H)=245.044
H=3.5	F(H)=254.731
H=4	F(H)=259.705
H=4.5	F(H)=261.538
H=5	F(H)=261.799
H=5.5	F(H)=262.061
H=6	F(H)=263.894
H=6.5	F(H)=286.868
H=7	F(H)=278.554
H=7.5	F(H)=284.524
H=8	F(H)=318.348
H=8.5	F(H)=351.597
H=9	F(H)=395.841
H=9.5	F(H)=452.651
H=10	F(H)=523.599

C

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=.0654498
H=1	F(H)=.529599
H=1.5	F(H)=1.76715
H=2	F(H)=4.18879
H=2.5	F(H)=8.18123
H=3	F(H)=14.1372
H=3.5	F(H)=22.4493
H=4	F(H)=33.5103
H=4.5	F(H)=47.7129
H=5	F(H)=65.4498
H=5.5	F(H)=87.1137
H=6	F(H)=113.097
H=6.5	F(H)=143.793
H=7	F(H)=179.594
H=7.5	F(H)=220.893
H=8	F(H)=268.083
H=8.5	F(H)=321.555
H=9	F(H)=381.708
H=9.5	F(H)=448.92
H=10	F(H)=523.599

D

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=74.6783
H=1	F(H)=141.895
H=1.5	F(H)=202.044
H=2	F(H)=255.516
H=2.5	F(H)=302.705
H=3	F(H)=344.004
H=3.5	F(H)=379.805
H=4	F(H)=410.501
H=4.5	F(H)=436.485
H=5	F(H)=458.149
H=5.5	F(H)=475.886
H=6	F(H)=490.088
H=6.5	F(H)=501.149
H=7	F(H)=509.462
H=7.5	F(H)=515.417
H=8	F(H)=519.41
H=8.5	F(H)=521.882
H=9	F(H)=523.075
H=9.5	F(H)=528.588
H=10	F(H)=523.599

E

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=10.472
H=1	F(H)=20.9439
H=1.5	F(H)=31.4159
H=2	F(H)=41.8879
H=2.5	F(H)=52.3599
H=3	F(H)=62.8318
H=3.5	F(H)=73.3038
H=4	F(H)=88.7758
H=4.5	F(H)=94.2477
H=5	F(H)=104.72
H=5.5	F(H)=145.608
H=6	F(H)=188.496
H=6.5	F(H)=230.383
H=7	F(H)=272.271
H=7.5	F(H)=314.159
H=8	F(H)=356.047
H=8.5	F(H)=397.935
H=9	F(H)=439.823
H=9.5	F(H)=481.711
H=10	F(H)=523.599

F

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=41.8879
H=1	F(H)=83.7758
H=1.5	F(H)=425.664
H=2	F(H)=167.552
H=2.5	F(H)=209.439
H=3	F(H)=251.327
H=3.5	F(H)=293.215
H=4	F(H)=335.103
H=4.5	F(H)=376.991
H=5	F(H)=418.879
H=5.5	F(H)=429.351
H=6	F(H)=489.823
H=6.5	F(H)=450.295
H=7	F(H)=460.767
H=7.5	F(H)=471.239
H=8	F(H)=481.711
H=8.5	F(H)=492.183
H=9	F(H)=502.655
H=9.5	F(H)=513.127
H=10	F(H)=523.599

ANNEXE V
Des réponses (H = 10 dm)

①. C'est la *sphère* qui donne le volume : $V = \frac{500\pi}{3} \ell \approx 523,6 \ell$.

②. Le *cylindre* (n° 1) : $\frac{500\pi}{3} = \pi R^2 H$ d'où $R^2 = \frac{50}{3}$; $R = \frac{5\sqrt{6}}{3}$
Volume du liquide : $h \rightarrow V(h) = \frac{50\pi}{3} h$.

③. Le *cône* (n° 4) : $\frac{500\pi}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ d'où $R^2 = 50$ $R = 5\sqrt{2}$.
Volume du liquide : $h \rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
avec $r = \frac{\sqrt{2}}{2} h$ on a : $V(h) = \frac{1}{6} \pi h^3$.

④. Le *cône* (n° 5) : on a encore $R = 5\sqrt{2}$.
Volume du liquide : $h \rightarrow V(h) = \frac{500\pi}{3} - \frac{1}{6} \pi (10-h)^3$ (voir 3)
d'où $V(h) = \frac{\pi}{6} (h^3 - 30h^2 + 300h)$

⑤. Le *sablier* (n° 6) : Les deux parties ont le même volume $\frac{250\pi}{3}$,
la même hauteur
5 et le même rayon $5\sqrt{2}$.

Volume du liquide :

$$\begin{cases} \text{si } h \leq 5 : V(h) = \frac{250\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} (5-h)^3 \\ \text{si } h > 5 : V(h) = \frac{250\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} (h-5)^3 \end{cases}$$

En définitive, pour tout h : $V(h) = \frac{250\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} (5-h)^3$.

⑥. Le *double cylindre* (2) : $r' = 2r$.

$$\frac{500\pi}{3} = 5\pi r'^2 + 5\pi r^2 = 25\pi r^2 \quad \text{d'où } r^2 = \frac{60}{9} ; r = \frac{2\sqrt{15}}{3} ; r' = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

Volume du liquide :

$$\begin{cases} \text{si } h \leq 5 : V(h) = \frac{80\pi}{3} h \\ \text{si } h > 5 : V(h) = \frac{400\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} (h-5) = 100\pi + \frac{20\pi}{3} h . \end{cases}$$

⑦. L'autre double cylindre (3) : mêmes rayons

$$\begin{cases} \text{si } h \leq 5 : V(h) = \frac{20\pi}{3} h \\ \text{si } h > 5 : V(h) = \frac{100\pi}{3} + \frac{80\pi}{3} (h - 5) = \frac{80\pi}{3} h - 100\pi . \end{cases}$$

⑧. La calotte sphérique : $R = 5$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi h^2 (15 - h) = 5\pi h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3 .$$

Qui va avec qui ?

	Récipient	Courbe	Formule	Tableaux de valeurs
Cylindre	(1)	n° 4	(III)	à faire...
Double cylindre	(2)	n° 2	(IV)	F
Double cylindre	(3)	n° 5	(VII)	E
Cône renversé	(4)	n° 7	(I)	C
Cône	(5)	n° 1	(V)	D
Sablier	(6)	n° 6	(VI)	B
Sphère	(7)	n° 3	(II)	A