Activité : Fonction dérivée

Niveau : Terminale bac pro (après le module « Nombre dérivé d'une fonction en *a* »). **Durée** : 2 h

Objectifs	
Objectif général	**Calculer la dérivée d'une fonction *f* sur un intervalle *I*.**
Connaissances	Concept de limite et dérivabilité. Améliorer la maîtrise du calcul littéral.
Capacités mathématiques	Développer, réduire, simplifier une expression littérale. Calculer la limite d'une expression littérale en *h* quand *h* tend vers zéro. Utiliser un tableau de dérivées usuelles pour calculer la dérivée d'une fonction quelconque.
Attitudes transversales	Le goût de chercher et de raisonner. La rigueur et la précision.
Capacités cognitives	Capacité de représentation (par le sens des calculs à effectuer) Flexibilité mentale (par le changement de cadre et de présentation)

Déroulement	
Etape 1 Rappel et généralisation à toutes les valeurs d'un intervalle I de la notion de nombre dérivé étudié lors de la séance précédente. Introduction de la notion de dérivabilité. (Reprise du schéma du taux d'accroissement). **Phase magistrale** **Support** : Tableau/cahier	Dans l'activité précédente (nombre dérivé d'une fonction en *a*) on a calculé le nombre dérivé $f'(a)$ de la fonction carré définie par $f(x) = x^2$ en $a = 5$, puis en $a = 2$, $a = 3$, $a = -3$ et $a = 0$. On va maintenant étudier la **dérivabilité** et calculer le nombre dérivé de cette fonction $f(x) = x^2$ en *a*, *a* un nombre réel quelconque. *f* étant définie sur *I* contenant *a* et *a+h*, elle est dérivable en *a* si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque *h* tend vers *0*. Dans ce cas, le nombre dérivé de *f* en *a* est : $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Pour $f(x) = x^2$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h$. Lorsque *h* tend vers *0* le taux d'accroissement $2a + h$ tend vers $2a$. La fonction carré est donc dérivable en *a* et $f'(a) = 2a$.
Etape 2 Définir la fonction dérivée. **Phase magistrale** **Support** : Tableau/cahier	On a montré que la fonction carré est dérivable en *a* quel que soit *a* avec $f'(a) = 2a$. On peut alors considérer une nouvelle fonction $x \mapsto 2x$, notée f' qui à tout *x* de l'intervalle *I* associe $2x$ le nombre dérivé de la fonction $f(x) = x^2$. Une fonction *f* est dérivable sur un intervalle *I* si *f* est définie sur *I* et dérivable en tout point de l'intervalle *I*. La fonction, définie sur l'intervalle *I*, qui à tout réel *x* de l'intervalle *I* associe le nombre dérivé de *f* en *x* est appelée **fonction dérivée** de *f* ; elle est notée *f*'.
Etape 3 Appliquer la définition à une nouvelle fonction. **Phase individuelle** **Support** : élève/cahier	Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 + 2x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction *f*' dérivée de *f* après avoir montré que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2+2(a+h)-a^2-2a}{h} = \frac{2ah+h^2+2h}{h} = 2a + 2 + h$ donc : $f'(x) = 2x + 2$ *Pour les plus rapides et les plus experts :* Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction *f*' dérivée de *f*. Pour cela, utiliser l'identité remarquable : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Etape 4 Fonctions dérivées usuelles et opérations. **Phase magistrale** **Support** : Tableau & formulaire	Tableau des dérivées usuelles : fonctions $cte,\ mx + p,\ x^2,\ x^n,\ 1/x\ ,\sqrt{x}$, domaine de définition et de dérivabilité, fonctions dérivées. À partir des fonctions de référence on peut fabriquer d'autres fonctions par addition, multiplication, quotient. Les dérivées de ces nouvelles fonctions sont calculées à partir des dérivées des fonctions usuelles en appliquant des règles de dérivation sur les opérations $u + v\ , ku\ , uv\ , u^2\ , 1/u\ , u/v$. On peut ensuite montrer aisément en reprenant la définition de la dérivée que $(ku)' = ku'$ et $(u + v)' = u' + v'$.
Etape 5 Applications. **Phase individuelle** **Support** : élève/cahier	On trouve toutes sortes d'applications directes de calcul de fonctions dérivées. On pourra finir par des applications contextualisées pour lesquelles la dérivée fait sens.