

# Somme de Gauss

Classe(s) : 5<sup>ème</sup>



Résolution d'un problème historique utilisant le calcul littéral

## 1) Objectifs

### Mathématiques

- Conjecturer la formule de Gauss relative à la somme des n premiers nombres entiers
- Appliquer le calcul littéral
- Conjecturer une formule

### Informatique

- Découvrir quelques fonctions de base du tableur.

	A	B	C
1	1	100	101
2	2	99	101
3	3	98	101
4	4	97	101
5	5	96	101
6	6	95	101
7	7	94	101
8	8	93	101
9	9	92	101
10	10	91	101
11	11	90	101
12	12	89	101
13	13	88	101
14	14	87	101
15	15	86	101
16	16	85	101

## 2) Énoncé de l'exercice

Gauss naît le 30 avril 1777 à Brunswick dans une famille d'artisans. Enfant prodige, il apprend à lire et à compter dès l'âge de trois ans et l'on raconte qu'à cet âge, il corrige une erreur dans les comptes de son père.

Une seconde anecdote relate également comment Gauss sait faire preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune Gauss, alors âgé de 10 ans, impressionne son professeur en donnant la réponse correcte.

*Sauriez-vous faire aussi vite que Gauss ?*

L'objectif de cette activité est d'expliquer la méthode utilisée par Gauss.

- 1) Ouvrir un fichier de tableur.
  - a) Ecrire dans une colonne la liste des cent premiers nombres.
  - b) Écrire dans la colonne suivante, la liste des cent premiers nombres mais dans l'ordre décroissant.
  - c) Qu'obtient-on si l'on fait la somme de deux cellules côté à côté ? Afficher les sommes dans une troisième colonne.
  - d) Au bas de chaque colonne, afficher la somme des nombres de la colonne. Expliquer alors pourquoi le calcul  $\frac{101 \times 100}{2}$  donne la solution au problème de Gauss.
- 2)
  - a) Dans une nouvelle feuille de calcul, on pourra utiliser une démarche analogue pour déterminer un calcul donnant la somme des 300 premiers nombres entiers.
  - b) Même question pour les 1344 premiers nombres entiers.

### Consignes orales :

Une production écrite est demandée aux élèves. Celle-ci pourra être ramassée en fin d'heure ou donnée en devoir.

## 3) Scénario

Classe de 5<sup>ème</sup> – 19 élèves en classe entière

Durée : 1 heure

### Contenu et organisation de la séance

#### Ce qui a été fait avant :

- Les élèves ont travaillé le calcul littéral et ont eu l'occasion de conjecturer des formules avec ou sans logiciel.
- Les élèves connaissent les fonctionnalités de base du tableur.

#### Le jour de la mise en œuvre (témoignage de l'enseignant) :

« Nous lisons ensemble la petite anecdote historique et je propose aux élèves d'essayer de faire au moins aussi bien que Gauss !

Motivés par le défi qui leur est proposé, les élèves se mettent immédiatement en situation de recherche.

Après 5/10 minutes d'essais infructueux, j'autorise aux élèves d'utiliser un outil informatique. Certains cherchent une méthode en utilisant leur calculatrice, mais leurs tentatives sont très vite avortées face à l'ampleur de la tâche.

Je propose alors d'utiliser le tableur pour calculer la solution et nous aider à conjecturer une formule simplifiée de calcul.

L'incrémentation des formules ne pose pas trop de difficulté et la plupart des groupes complètent la feuille de calcul comme il l'est demandé.

Un premier bilan est alors réalisé en classe entière afin de valider la formule de calcul et de bien la comprendre.

Les élèves se remettent ensuite au travail pour calculer les deux autres sommes.

En fin d'heure, un nouveau débat est mené avec l'ensemble de la classe pour déterminer la formule permettant de calculer la somme des  $n$  premiers entiers et de valider cette formule par une justification non formalisée. »

#### Ce qui a été fait après

- Calculer la somme des 56 789 premiers entiers
- Calculer la somme des entiers de 2541 à 2608

## Les outils nécessaires ou utiles

### Matériel :

Un poste informatique par binôme.

### Logiciel :

Un tableur : Open Office Calc (<http://www.openoffice.org>) ou Excel

## L'évaluation

### Compétences B2I :

**C.1.1 :** Je sais m'identifier sur un réseau ou un site et mettre fin à cette identification

**C.1.2 :** Je sais accéder aux logiciels et aux documents disponibles à partir de mon espace de travail.

**C.1.3 :** Je sais organiser mes espaces de stockage.

**C.2.4 :** Je m'interroge sur les résultats des traitements informatiques (calcul, représentation graphique, correcteur...)

### Compétences mathématiques (grille d'évaluation) :

Compétences	
M1	Réaliser une production de qualité
M2	Faire une recherche active
M3	Énoncer une conjecture
M4	Savoir utiliser les outils du cours

### Commentaires :

M1 :

*La production réalisée peut être une construction, un programme de construction, un tableau à compléter, des calculs à effectuer, ...*

*L'élève a réussi à intégrer la problématique et a su utiliser l'outil informatique pour apporter des réponses aux objectifs énoncés.*

M2 :

*La recherche est organisée. La démarche expérimentale est dynamique et autonome. L'élève développe lui-même les outils de son expérience : il demande par exemple d'utiliser un outil informatique plutôt qu'un autre.*

*La narration de la recherche permet de dégager les différentes pistes ou essais qui n'ont pas nécessairement abouti : descriptions, dessins, schémas, ...*

*Si l'activité se fait en groupe, tous les élèves auront participé à la recherche.*

M3 :

*La conjecture énoncée peut être fausse mais cohérente avec la problématique énoncée. L'élève doit être convaincu de sa conjecture.*

*L'élève sait distinguer le statut d'une conjecture à celui d'une propriété démontrée.*

M4 :

*L'élève sait appliquer ses connaissances mathématiques à bon escient.*