

La ville carrée

Classe(s) : 3^{ème}

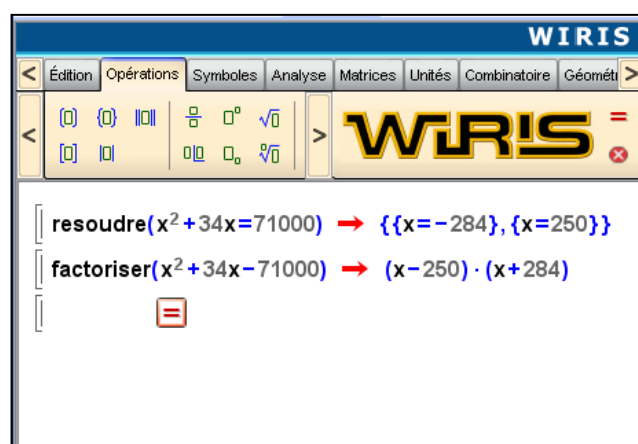


Problème de mise en équation.
Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour esquiver des calculs algébriques sur une expression du second degré.

1) Objectifs

Mathématiques :

- Mise en équation d'un problème concret en passant par une représentation géométrique des données
- Notion de solution d'équation, notion de calcul algébrique
- Equation-produit
- Réinvestissement de théorèmes classiques de géométrie (Pythagore, Thalès)



TICE

- Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour esquiver des calculs algébriques que les connaissances du collège ne permettent pas de résoudre.

2) Énoncé de l'exercice

Une ville carrée de dimension inconnue comprend une porte au milieu de chaque côté.

A l'extérieur de la ville, vingt pas après la sortie Nord, se trouve un arbre.

Si tu quittes la ville par la porte Sud, marche quatorze pas vers le Sud puis 1775 vers l'Ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

On cherche les dimensions de la ville.

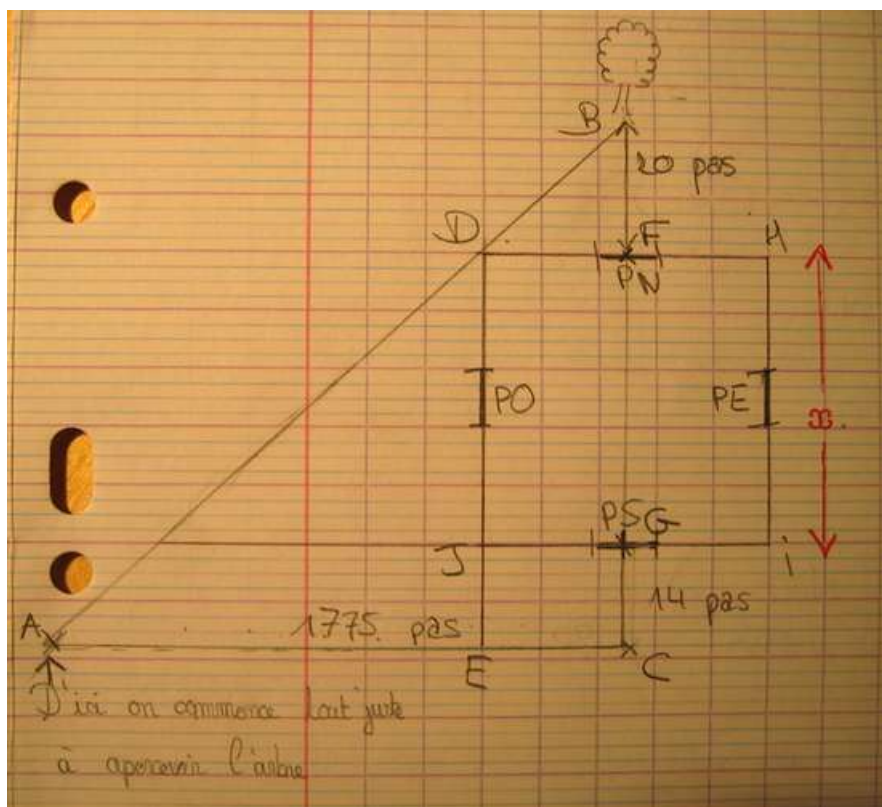
D'après le « Jiuzhang suanshu » ou les « Neuf chapitres sur l'art du calcul », ouvrage chinois de 200 avant JC composé de 246 problèmes ayant pour but de fournir des méthodes pour résoudre les problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité.

- 1) Faire une figure à main levée représentant les données de l'énoncé.
- 2) a) En appliquant le théorème de Thalès, prouvez que le problème peut se ramener à résoudre l'équation $x^2 + 34x = 71000$ où x est la longueur des côtés de la ville.
b) A l'aide d'un logiciel de calcul formel, donner la solution au problème.
- 3) a) Utiliser le logiciel de calcul formel pour factoriser l'expression $x^2 + 34x - 71000$.
b) Retrouver alors la solution au problème en résolvant une équation-produit.
- 4) Prolongement :
Quelle distance te sépare de l'arbre ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au pas près.

Consignes orales :

Une production écrite est demandée aux élèves. Celle-ci pourra être ramassée en fin d'heure ou donnée en devoir.

- Les élèves s'installent par groupes de deux devant les ordinateurs.
- Le professeur dicte par étapes l'énoncé pendant que les élèves réalisent une figure codée.
- Les élèves poursuivent en semi autonomie pour la mise en équation du problème.
- Après 15 minutes de recherche, le professeur demandera aux groupes qui le souhaitent d'explicitier leur méthode à la classe.
- Incités par le professeur, les élèves utilisent le logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation ainsi établie.
- Les élèves finiront l'activité en semi autonomie.



3) Scénario

Classe de 3^{ème} – 27 élèves en classe entière

Durée : 1 heure

Contenu et organisation des séances :

Ce qui a été fait avant :

Pour pouvoir traiter l'activité jusqu'au bout, l'équation-produit doit être connue.

En supprimant la question 3, il est néanmoins possible de réaliser l'activité avec les connaissances de la classe de quatrième.

En informatique, le fait que les élèves aient déjà manipulé un logiciel de calcul formel peut présenter quelques avantages mais ce n'est pas indispensable.

Le jour de la mise en œuvre (témoignage de l'enseignant) :

« Le sujet est accrocheur ; les élèves semblent assez vite entrer dans le problème. La réalisation de la figure connaît pourtant quelques difficultés. Que signifie le terme "tout juste" ? Quelles sont les mesures connues ? Inconnues ? Quelle est la distance de l'arbre au point le plus au Sud ?

J'accompagne l'application du théorème de Thalès de quelques explications. Les manipulations algébriques posent des difficultés à certains groupes.

Les élèves écrivent les quotients égaux et obtiennent une équation à une inconnue ! Parfait ! Nous venons tout juste de faire des exercices sur la résolution d'équations ! La modélisation du problème semble bien passer.

Un nouveau débat s'en suit autour du sens du mot équation et de la notion de solution. L'application du produit en croix pour aboutir à une équation sans fraction n'est pas aussi intuitive qu'elle peut l'être habituellement sur les rapports de Thalès. A ce niveau, et pour faciliter la tâche d'élèves peu à l'aise avec les calculs algébriques, il est possible d'utiliser le logiciel pour développer les expressions.

Lorsque les élèves utilisent le logiciel pour résoudre l'équation, celui-ci nous propose deux solutions : $x = 250$ et $x = -284$ (voir copie d'écran à la fin).

Aurions-nous pu prendre $x = -284$? « Oui, il suffit de compter les pas en marche arrière » !!! Après réflexion, les élèves retiendront uniquement $x = 250$ pas comme solution à notre problème concret.

La partie 3 soulève de nouvelles interrogations. Pourquoi chercher à nouveau la solution au problème puisqu'on la possède déjà ? Certains élèves utiliseront encore le logiciel pour résoudre l'équation-produit.

La moitié des groupes ont tenté le prolongement de l'activité pour le calcul de la distance à l'arbre et seuls deux groupes ont abouti. »

Les outils nécessaires ou utiles :

Matériel :

Un poste informatique par binôme.

Logiciel :

Un logiciel de calcul formel : <http://www.wiris.com/demo/fr/> par exemple.

L'évaluation

Compétences B2I :

C.1.1 : Je sais m'identifier sur un réseau ou un site et mettre fin à cette identification

C.1.2 : Je sais accéder aux logiciels et aux documents disponibles à partir de mon espace de travail.

C.2.4 : Je m'interroge sur les résultats des traitements informatiques (calcul, représentation graphique, correcteur...)

Compétences mathématiques (grille d'évaluation) :

Compétences	
M1	Réaliser une production de qualité
M2	Faire une recherche active
M4	Savoir utiliser les outils du cours
M5	Rédiger une démonstration structurée
M6	Rédiger une démonstration complète

Commentaires :

M1 :

La production réalisée peut être une construction, un programme de construction, un tableau à compléter, des calculs à effectuer, ...

L'élève a réussi à intégrer la problématique et a su utiliser l'outil informatique pour apporter des réponses aux objectifs énoncés.

M2 :

La recherche est organisée. La démarche expérimentale est dynamique et autonome. L'élève développe lui-même les outils de son expérience : il demande par exemple d'utiliser un outil informatique plutôt qu'un autre.

La narration de la recherche permet de dégager les différentes pistes ou essais qui n'ont pas nécessairement abouti : descriptions, dessins, schémas, ...

Si l'activité se fait en groupe, tous les élèves auront participé à la recherche.

M4 :

L'élève sait appliquer ses connaissances mathématiques à bon escient.

M5 :

L'élève rédige un raisonnement cohérent à partir des données de l'énoncé mais qui n'aboutit pas nécessairement.

La rédaction, rigoureuse et organisée, s'appuie sur les outils du cours.

M6 :

La démonstration a abouti même si la rédaction n'est pas rigoureuse et structurée.

L'élève fait référence aux données nécessaires et a choisi les outils appropriés.

Copie d'élève (page suivante) ↓

2a) BDF et BAC sont en situation de Thalès car $(DF) \parallel (AC)$:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{20}{x+34}$$

$$\frac{20 \times 1775}{x+34} = \frac{x}{2}$$

$$20 \times 1775 = \frac{x}{2} (x+34)$$

$$2 \times 20 \times 1775 = x(x+34)$$

$$71000 = x^2 + 34x$$

$$x^2 + 34x = 71000$$

b) solve $(x^2 + 34x = 71000, x)$

$$x = -284 \text{ ou } x = 250$$