13. UMFANGSWINKEL (oder PERIPHERIEWINKEL) und MITTELPUNKTSWINKEL (oder ZENTRIWINKEL) REGELMÄSSIGE VIELECKE.

<u>Remarque préliminaire :</u> ce chapitre, présent dans la version de 2004, a été complètement retravaillé puisque les rotations, qui avaient permis d'introduire les polygones réguliers, ne figurent plus au programme de 3ème de 2008.

ZUM EINSTEIGEN

Einleitende und wiederholende Aufgaben.

1) Richtig oder falsch ?

a) Die Größe eines spitzen Winkels liegt zwischen 90° und 180°.
b) Die Größe eines stumpfen Winkels liegt zwischen 0° und 90°.
c) Die Größe eines überstumpfen Winkels liegt zwischen 180° und 360°.
d) Ein gestreckter Winkel ist doppelt so groß wie ein rechter Winkel.
e) Die Größe eines Vollwinkels beträgt 380°.

Objectifs visés :

☛ *Savoir calculer un angle en utilisant la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre qui intercepte le même arc.*
☛ *Connaître la définition des polygones réguliers.*
☛ *Savoir construire un triangle équilatéral et un carré connaissant son centre et un de ses sommets (socle commun).*
☛ *Savoir construire un hexagone régulier (éventuellement un octogone ou un autre polygone régulier) connaissant son centre et un sommet.*
☛ *Savoir résoudre des problèmes faisant intervenir la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre qui intercepte le même arc.*

2) In der folgenden Aufgabe ist nur eine Antwort richtig für jede Frage.

- In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit Basis [BC] gilt :
  a) = b) = c) = .

- In einem gleichseitigen Dreieck RST gilt :
  a) + = 180° b) = 90° c) = 60°

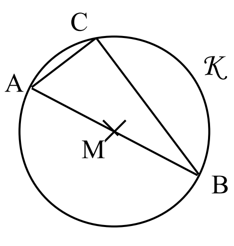
- In einem bei T rechtwinkligen Dreieck RAT gilt :
  a) = 90° b) = 90° c) =

- In einem regelmäßigen Sechseck gibt es :
  a) sechs Seiten b) fünf Seiten c) sechs gleichlange Seiten

- In einem Quadrat ABCD ist O der Schnittpunkt der Diagonalen. Es gilt :
  a) = 45° b) = 60° c) = 90°

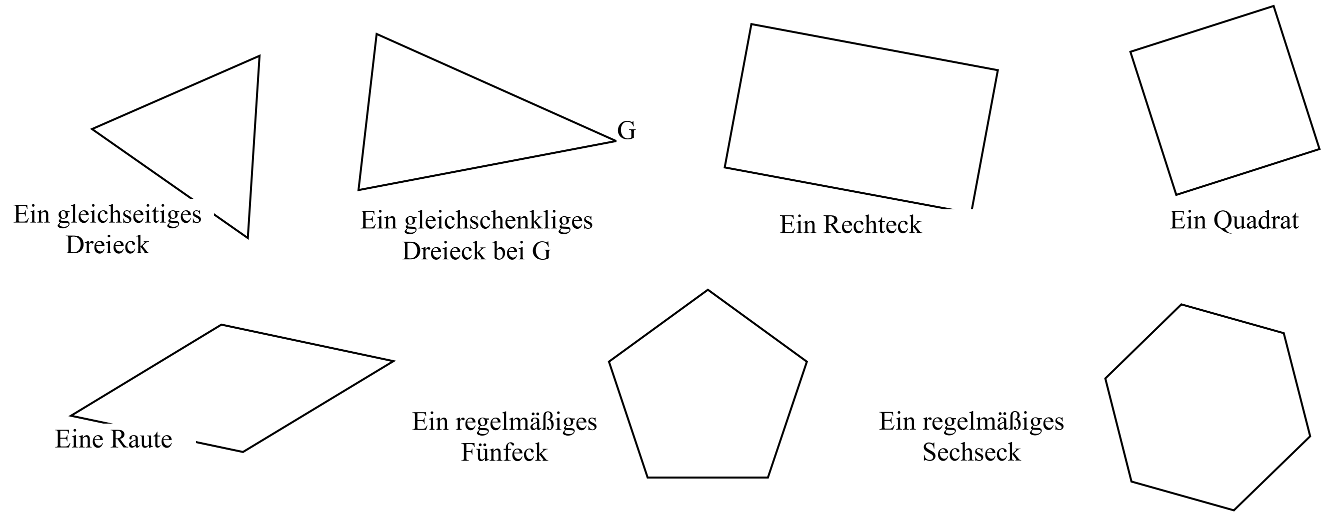
- In einem beliebigen Dreieck ist der Umkreismittelpunkt der Schnittpunkt :
  a) der 3 Höhen b) der 3 Mittelsenkrechten c) der 3 Winkelhalbierenden

3)



Die Punkte A, B und C liegen auf dem Kreis 𝒦 mit Durchmesser [AB] und Mittelpunkt M.
Welches Verhältnis gibt es zwischen den Winkeln und ?
Begründe deine Antwort durch eine Eigenschaft aus der « 4ème ».

4) Trage in die folgenden Figuren, falls möglich, jeweils die Symmetrieachsen, das Symmetriezentrum und den Umkreis ein.

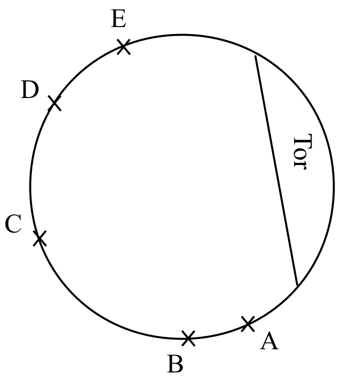


I UMFANGSWINKEL (oder PERIPHERIEWINKEL) und MITTELPUNKTSWINKEL (oder ZENTRIWINKEL)

Einstieg 1 Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel entdecken

Objectif : Découvrir la notion d'angle inscrit et d'angle au centre ainsi que les propriétés qui s'y rapportent

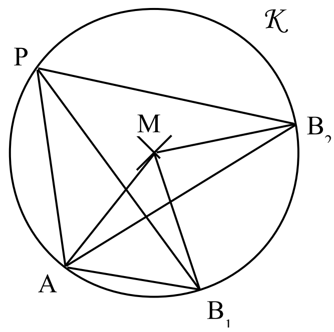
Aufgabe 1 :

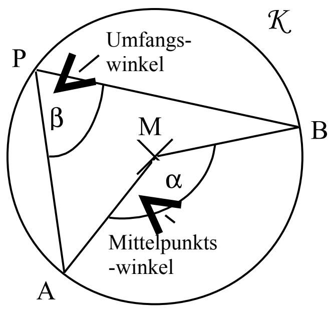


Der Fußballtrainer Schnellspiel übt mit seinen Stürmern Albert, Bernd, Christoph, Dominique und Emile Toreschießen. Sie stehen auf einer kreisförmigen Linie und sollen von dort nach einem Pass den Ball flach ins Tor schießen.
Welcher Stürmer hat dabei den größten « Einschusswinkel »?
Formuliere eine Vermutung.

Aufgabe 2 :

Marion hat in der nebenstehenden Figur einen Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunkt M gezeichnet. Auf der Kreislinie trägt sie einen Punkt P sowie zwei verschieden lange Sehnen [AB₁] und [AB₂] ein. Sie misst danach die Größe der Winkel , , und und entdeckt eine neue mathematische Eigenschaft.
Formuliere eine Vermutung und vergleiche sie mit deinem Nachbarn.

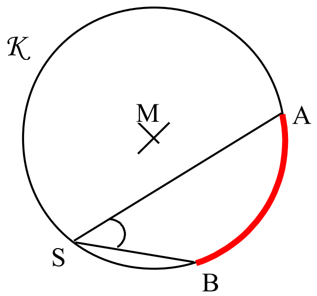




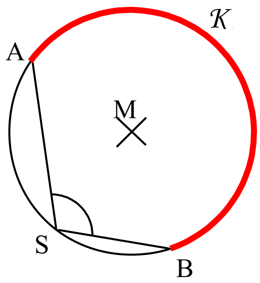
Zur Information 1

☛ Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt auf einem Kreis liegt und dessen Schenkel den Kreis schneiden, heißt **Umfangswinkel** (oder **Peripheriewinkel**) des Kreises.
☛ Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt der Mittelpunkt eines Kreises ist, heißt **Mittelpunktswinkel** (oder **Zentriwinkel**).

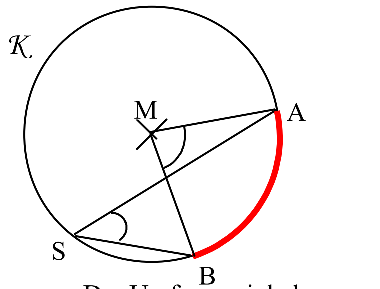
Zur Information 2



Der Umfangswinkel
liegt über dem kleineren Bogen AB.



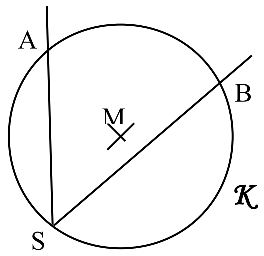
Der Umfangswinkel
liegt über dem größeren Bogen AB.



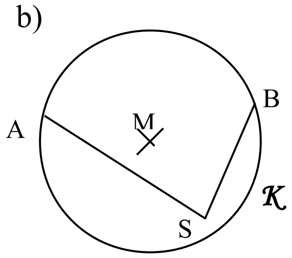
Der Umfangswinkel
und der Mittelpunktswinkel **liegen über demselben Bogen AB.**

<u>Aufgabe 3 :</u> In welchen der folgenden Kreisen heißt ein Umfangswinkel ? Begründe und zeichne jeweils den Bogen über dem der Umfangswinkel liegt.

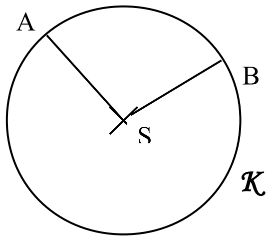
a)



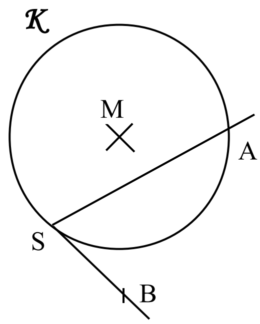
b)



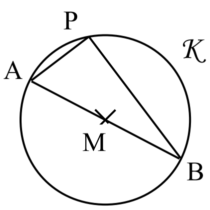
c)



d)



<u>Aufgabe 4 :</u>



Der Punkt P liegt auf dem Kreis K mit Durchmesser [AB] und Mittelpunkt M.
a) Vergleiche die Winkel und und notiere den Umfangswinkel und den Mittelpunktswinkel.
b) Welches Verhältnis gibt es zwischen diesen beiden Winkeln ?
Begründe deine Antwort ! (Denke an eine Eigenschaft aus der « 4ème » !)

<u>Einstieg 2</u> **Umfangswinkelsatz und Mittelpunktswinkelsatz**

In den vorigen Aufgaben 1, 2, 3 und 4 haben wir vermutet, dass : 1) Umfangswinkel über demselben Kreisbogen gleich groß sind, 2) der Mittelpunktswinkel doppelt so groß ist wie jeder Umfangswinkel über demselben Kreisbogen. Wie werden nun diese Vermutungen beweisen. Zum vollständigen Beweis müssen wir drei Fälle unterscheiden.

<u>Aufgabe 1 :</u> <u>Erster Fall :</u>
<u>Der Punkt M liegt auf der Strecke [PB], also ist [PB] ein Durchmesser des Kreises K.</u>

Objectif : Démontrer la propriété découverte précédemment en trois étapes successives

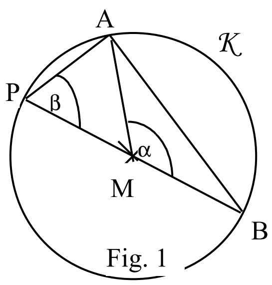


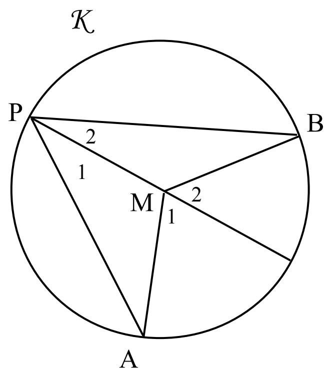
Fig. 1

a) Was kannst du über das Dreieck PMA sagen ?
Begründe deine Antwort und schließe daraus, dass :
☛ = = β ,
☛ β = ,
☛ = 180 -α.

b) Welches Verhältnis ergibt sich schließlich zwischen α und β ?
Ergänze : β = ……. α

Aufgabe 2 : Zweiter Fall :
Der Punkt M liegt innerhalb des Dreiecks APB.

Remarque : Le professeur choisira de donner cette démonstration telle quelle ou de la laisser découvrir partiellement aux élèves

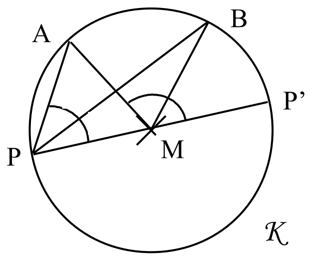


Lösungsweg :
☛ Wir teilen den Umfangswinkel in zwei Winkel und und den Mittelpunktswinkel in zwei Winkel und , indem wir die Strecke [PM] verlängern. Aus dem ersten Fall schließen wir dass :
= 2 × und = 2 × .

☛ Wir addieren diese beiden Gleichungen und erhalten :
= + = 2 × + 2 × = 2 × (+) = 2 × .

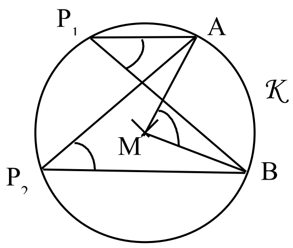
Damit ist der Satz des Mittelpunktswinkels für den zweiten Fall bewiesen.

Aufgabe 3 : Dritter Fall :
Der Punkt M liegt außerhalb des Dreiecks APB



[PP'] ist ein Durchmesser des Kreises K.
a) Ergänze mit Hilfe des ersten Falls :
= ……… und = …………
b) = –. Benutze nun die Ergebnisse aus Frage a) und schließe daraus, dass = .

Aufgabe 4



P_1, P_2, A und B liegen auf demselben Kreis K mit Mittelpunkt M.
a) Welches Verhältnis gibt es zwischen den Winkeln
☛ und ,
☛ und ? Begründe deine Antworten !
b) Was kannst du daraus für die Winkel und schließen ?

Zur Information 3

☛ Wenn zwei **Umfangswinkel über demselben Bogen eines Kreises** liegen, dann sind sie **gleich groß.** (**Umfangswinkelsatz**)

☛ Wenn ein **Mittelpunktswinkel** und ein **Umfangswinkel über demselben Bogen eines Kreises** liegen, dann ist der **Mittelpunktswinkel doppelt so groß** wie der **Umfangswinkel**. **(Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz)**

II REGELMÄSSIGE VIELECKE

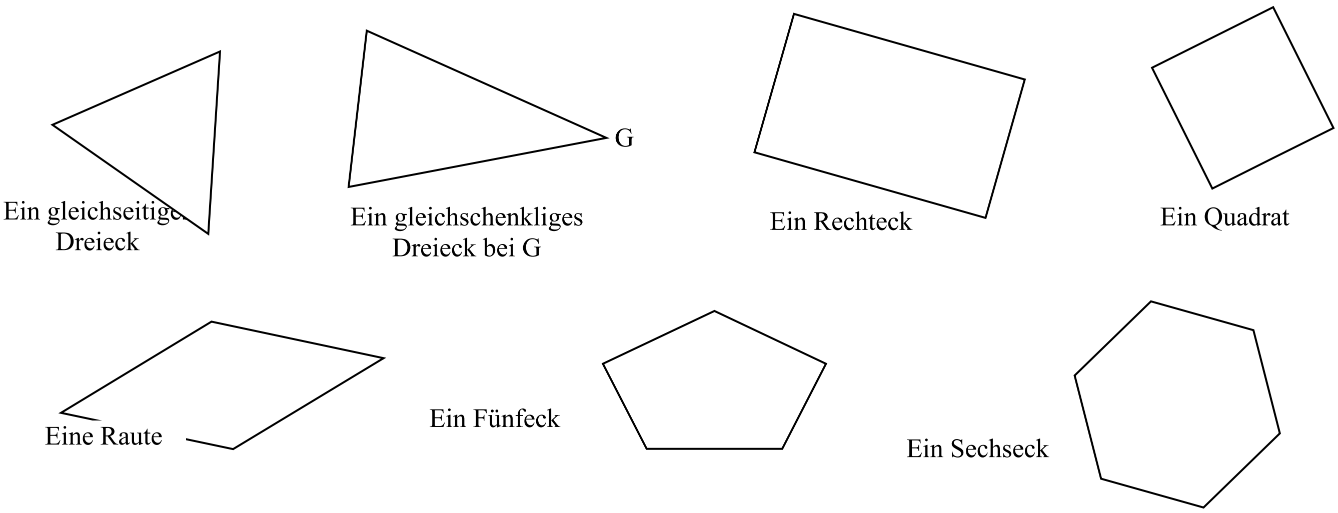
Einstieg 3 **RegelmäSSige Vielecke erkennen**

Objectif : Connaître la définition d'un polygone régulier

Zur Information 4

Ein Vieleck heiß t **regelmäß ig**, wenn alle seine **Seiten gleich lang** und **alle seine Winkel gleich groß** sind.

Aufgabe : Welche der folgenden Figuren scheinen regelmäßige Vielecke zu sein ? Benutze die obere Information !

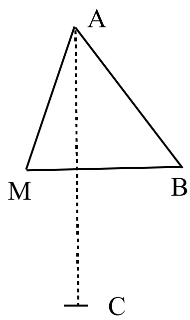


Einstieg 4 **Regelmäßige Vielecke konstruieren**

Aufgabe 1 : 1. a) Konstruiere :

- ein gleichschenkliges Dreieck AMB mit Basis [AB], so dass = 72° ;
- den Punkt C, Bildpunkt von A an der Spiegelachse (MB) ;
- den Punkt D, Bildpunkt von B an der Spiegelachse (MC) ;
- den Punkt E, Bildpunkt von C an der Spiegelachse (MD) ;
- den Bildpunkt von D an der Spiegelachse (ME).

1. b) Was kannst du über diesen Bildpunkt sagen ?



2. a) Beweise, dass : AB = BC = CD = DE = EA
und = = = =

2. b) Was kannst du daraus schließen ?
Man sagt, dass ABCDE ein **regelmäßiges Fünfeck** ist.

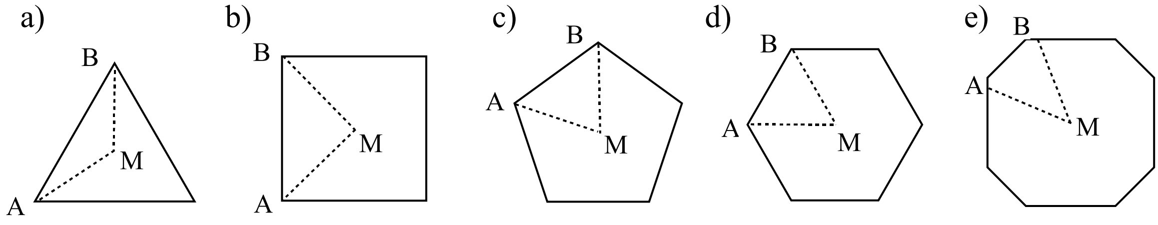
3. a) Beweise, dass : MA = MB = MC = MD = ME.
3. b) Zeichne den Umkreis des Fünfecks ABCDE. Gib den Mittelpunkt und den Radius an.
3. c) Was kannst du daraus schließen ?

Zur Information 5

Ir **regelmäßigen Vieleck** liegen alle Eckpunkte auf einem Kreis, dem **Umkreis** d ks. **Der Mittelpunkt des Umkreises ist das Zentrum des Vielecks.**

Aufgabe 2 : Der Punkt M ist das Zentrum der folgenden regelmäßigen Vielecken. Bestimme jeweils die Größe des Winkels . Begründe deine Antwort. Schließe daraus die Konstruktion dieser regelmäßigen Vielecken, wenn ihr Zentrum M und ein Eckpunkt bekannt sind.

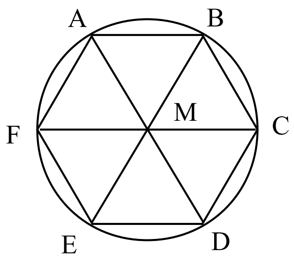
Objectif : Déterminer la mesure de l'angle au centre d'un polygone régulier et savoir le construire connaissant son centre et un de ses sommets.



Aufgabe 3 : Zeichne ein **regelmäßiges Dreieck** und den zugehörigen Umkreis.

a) Welche bekannte Figur ergibt sich ?
b) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel ? Begründe deine Antwort.
c) Verfahre ebenso mit einem **regelmäßigen Viereck**.

Aufgabe 4 :



a) ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck.
Wie groß ist der Winkel ? Begründe deine Antwort.
b) Wie groß ist der Winkel ? Begründe deine Antwort.

Anleitung für die Frage b) : ☛ Berechne zuerst in den gleichschenkligen Dreiecken AMB und BMC die Größe der Winkel und .
☛ Schließe daraus die Größe des Winkels .

Objectif : Les exercices 5 et 6 sont « limite programme », à proposer aux élèves rapides comme travail de recherche avec l'aide de l'exercice 4

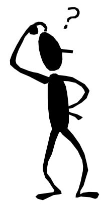
Aufgabe 5 :

(1) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel eines
a) regelmäßigen Fünfecks ? b) regelmäßigen Achtecks ?
c) regelmäßigen Neunecks ? d) regelmäßigen n- Ecks (oder eines regelmäßigen Vielecks mit n Seiten) ?

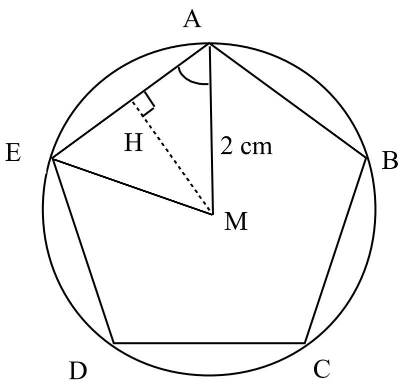
(2) Wie groß ist jeweils der Innenwinkel (das heißt der Winkel zwischen zwei Seiten) jeder dieser Figuren ?

Aufgabe 6 :

Mit welchen regelmäßigen Vielecken kann man die Ebene belegen ?
Zeichne jeweils ein solches Parkettmuster.



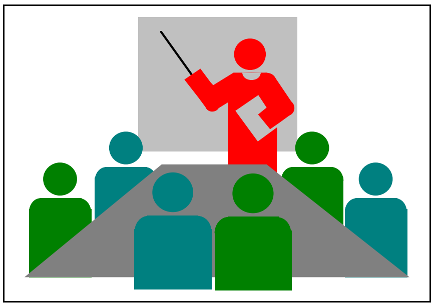
Einstieg 5 **Regelmäßige Vielecke und Trigonometrie**



Aufgabe :

ABCDE ist ein regelmäßiges Fünfeck mit Zentrum M.
Sein Umkreisradius ist 2 cm lang.
Berechne die genaue Länge der Strecke [AE].

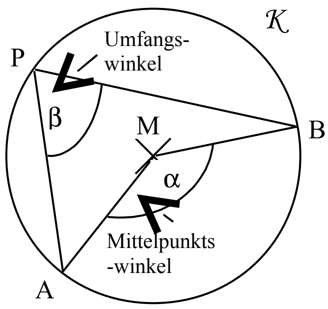
Anleitung :
☛ Berechne zuerst die Größe der Winkel und .
☛ Zeichne die Höhe (MH) im Dreieck AME. Was kannst du über diese Höhe sagen ? (denke an eine Eigenschaft aus der « quatrième »)
☛ Berechne nun AH mit Hilfe der Trigonometrie und schließe daraus auf AE.



ERINNERE DICH ...

Remarques préalables : *- Les correspondances françaises ont été mises en fonction de la place disponible.*
-Le pentagone, au dernier paragraphe, n'est donné qu'à titre d'information, n'étant pas exigible au programme.
*-Il serait bon de faire remarquer aux élèves que les polygones allemands se nomment selon leur nombre de côtés : **Drei**eck ; **Fünf**eck ; **Sechs**eck ; usw). En langue française, il faut retenir que : **3** côtés = **tri**angle, 5 côtés = **penta**gone, 6 côtés = **hexa**gone etc.*

UMFANGSWINKEL (oder PERIPHERIEWINKEL) und MITTELPUNKTSWINKEL (oder ZENTRIWINKEL)



☛ Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt auf einem Kreis liegt und dessen Schenkel den Kreis schneiden, heißt **Umfangswinkel** (oder **Peripheriewinkel**) des Kreises.

☛ Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt der Mittelpunkt eines Kreises ist, heißt **Mittelpunktswinkel** (oder **Zentriwinkel**).

☛ Wenn zwei **Umfangswinkel über demselben Bogen eines Kreises** liegen, dann sind sie **gleich groß.**
(**Umfangswinkelsatz**)

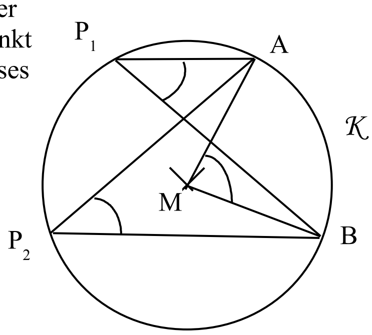
☛ Wenn ein **Mittelpunktswinkel** und ein **Umfangswinkel über demselben Bogen eines Kreises** liegen, dann ist der **Mittelpunktswinkel doppelt so groß** wie der **Umfangswinkel**.
(Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz)

*☛ Si **deux angles inscrits** dans un cercle **interceptent le même arc** alors ils ont la **même mesure.***

*☛ Si, dans un cercle, un **angle au centre** et un **angle inscrit interceptent le même arc** alors **la mesure de l'angle au centre est le***

Beispiele :

M ist der Mittelpunkt des Kreises K



☛ und sind zwei Umfangswinkel, die über demselben Bogen AB des Kreises K liegen, daher folgt nach dem Umfangswinkelsatz : = .

☛ und sind jeweils ein Umfangswinkel und ein Mittelpunktswinkel, die über demselben Bogen AB des Kreises K liegen, daher folgt nach dem Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz : = oder = 2 .

REGELMÄSSIGE VIELECKE

Ein Vieleck heißt **regelmäßig**, wenn alle seine **Seiten gleich lang** und **alle seine Winkel gleich groß sind.**

Beispiele :

- ein **gleichseitiges Dreieck** ist ein **regelmäßiges Vieleck** mit drei Seiten.
- ein **Quadrat** ist ein **regelmäßiges Vieleck** mit vier Seiten.
- ein **regelmäßiges Fünfeck** hat fünf gleich lange Seiten und fünf gleich große Winkel.
- ein **regelmäßiges Sechseck** hat sechs gleich lange Seiten und sechs gleich große Winkel.
- ein **regelmäßiges Neuneck** hat neun gleich lange Seiten und neun gleich große Winkel.

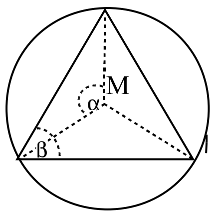
***Attention** :*

- *3 côtés = **tri**angle*
- *4 côtés = **quadri**latère*
- *5 côtés = **penta**gone*
- *6 côtés = **hexa**gone*
- *7 côtés = **hepta**gone*
- *8 côtés = **octo**gone*
- *9 côtés = **ennéa**gone*
- *10 côtés = **déca**gone*

Ein Vieleck heißt **regelmäßig**, wenn alle seine **Seiten gleich lang** sind und **alle seine Eckpunkte auf einem Kreis, dem Umkreis desVielecks, liegen.**

Beispiele :

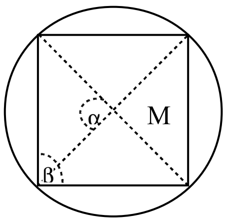
Ein gleichseitiges Dreieck



α=

Der Mittelpunktswinkel α ist **120°** groß.

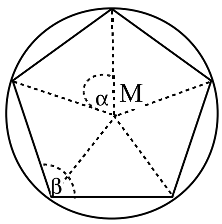
Ein Quadrat



α=

Der Mittelpunktswinkel α ist **90°** groß.

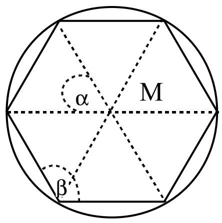
Ein regelmäßiges Fünfeck



α=

Der Mittelpunktswinkel α ist **72°** groß.

Ein regelmäßiges Sechseck



α=

Der Mittelpunktswinkel α ist **60°** groß.

Für jedes regelmäßige Vieleck gilt : β = 180 -α, daher folgt :

Der Innenwinkel β ist **60°** groß

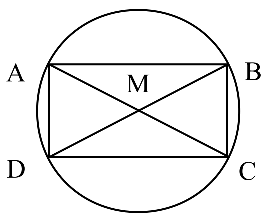
Der Innenwinkel β ist **90°** groß.

Der Innenwinkel β ist **108°** groß.

Der Innenwinkel β ist **120°** groß.

Gegenbeispiel :

AB ≠ BC



Ein Rechteck ist kein regelmäßiges Vieleck, seine Eckpunkte liegen wohl auf demselben Kreis, aber nur die Gegenseiten sind gleich lang !

ÜBUNGEN ZUR FESTIGUNG UND ZUM WEITERARBEITEN

A) UMFANGSWINKEL und MITTELPUNKTSWINKEL

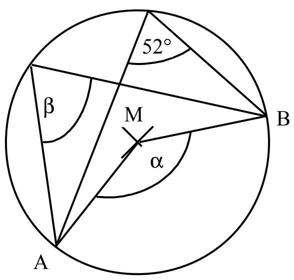
A1) Zeichne einen Kreis mit dem Radius 3 cm und einen Punkt A auf dem Kreis.
Zeichne drei Umfangswinkel, die jeweils eine Größe von 35° haben.
Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

A2) Paul sagt, dass der Satz : « Wenn bei einem Dreieck ABC die Ecke C auf dem Kreis mit dem Durchmesser [AB] liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel » ein Sonderfall des Mittelpunkts-Umfangswinkel-Satzes ist. Was hältst du davon ? Begründe deine Antwort !

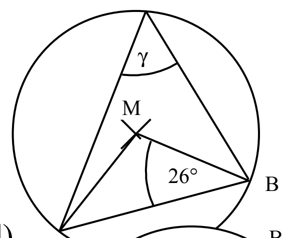
A3) Zeichne zwei Punkte A und B, die 4 cm voneinander entfernt sind.
Konstruiere, falls möglich, einen Kreis durch A und B, so dass :
a) der Mittelpunktswinkel über $\overset{\frown}{AB}$ eine Größe von 100° hat,
b) der Umfangswinkel über $\overset{\frown}{AB}$ eine Größe von 50° hat,
c) der Mittelpunktswinkel über $\overset{\frown}{AB}$ eine Größe von 110° und ein Umfangswinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{AB}$ eine Größe von 65° haben.
Wie viele Lösungen gibt es jeweils ?
Erkläre jeweils die Konstruktion.

A4) Wie groß sind jeweils die Winkel α, β , γ, δ, ε in den folgenden Figuren ? Begründe deine Antwort!

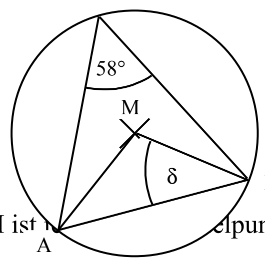
a)



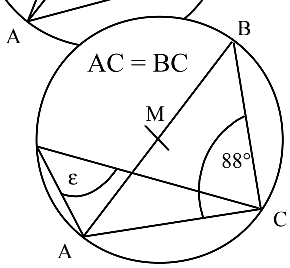
b)



c)



d)



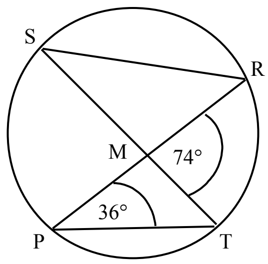
M ist der Mittelpunkt des Kreises.

A5) Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius 4 cm. Zeichne eine Sehne [AB], zu der ein Umfangswinkel von 70° (110°; 45°; 135°) gehört.

A6) Zeichne eine 3 cm lange Strecke [AB]. Konstruiere einen Kreis so, dass der zur Sehne [AB] gehörende Mittelpunktswinkel 100° (140°; 90°) beträgt.

A7) a) Zeichne eine Strecke [AB] so, dass : AB = 7 cm und einen Punkt C so, dass :
 = 70° und = 60°.
b) Zeichne den Umkreis des Dreiecks ABC und nenne M seinen Mittelpunkt.
c) Wie groß ist der Winkel ? Begründe !

A8) a) Kann in der folgenden Figur der Punkt M der Mittelpunkt des Kreises sein ? Begründe !
b) Berechne die Größe des Winkels .



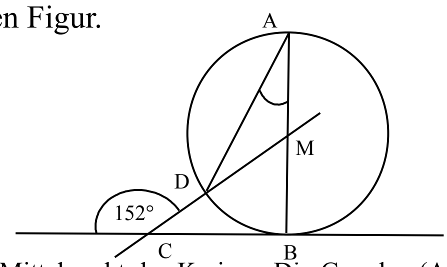
S, M und T liegen auf derselben Geraden.

P, M und R liegen auf derselben Geraden.

A9) Zeichne einen Kreis mit dem Radius 3 cm und der Sehne [AB] so, dass AB = 4,5 cm. Berechne (mit Hilfe der Trigonometrie) den Mittelpunktswinkel und einen zugehörigen Umfangswinkel. (Siehe Einstieg 5)

A10) Zeichne einen Kreis mit dem Radius 3,2 cm und dem Mittelpunktswinkel = 114°.
a) Wie groß ist ein Umfangswinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{AB}$? Begründe !
b) Berechne (mit Hilfe der Trigonometrie) die Länge der Sehne [AB]. (Siehe Einstieg 5)

A11) Berechne die Größe des Winkels in der folgenden Figur.



M ist der Mittelpunkt des Kreises. Die Geraden (AB) und (CB) sind zueinander senkrecht.

B)

C) REGELMÄSSIGE VIELECKE

B1) Zeichne, nur mit Zirkel und Lineal, ein regelmäßiges Sechseck mit Mittelpunt M und Eckpunkt A so, dass : MA = 4 cm.

B2) a) Zeichne, nur mit Zirkel und Lineal, ein regelmäßiges Sechseck.
b) Versuche, wieder mit Zirkel und Lineal, die vorige Figur zu einem regelmäßigen Zwölfeck zu ergänzen.

B3) a) Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE mit dem Mittelpunkt M so, dass :
MA = 5 cm.
b) Bestimme die Größe der Winkel und .
c) Schließe daraus die Größe des Winkels .

B4) Regelmäßig oder nicht ?
a) Was kannst du über ein unregelmäßiges Viereck mit 4 gleichlangen Seiten sagen ?
b) Was kannst du über ein unregelmäßiges Viereck mit 4 gleichgroßen Winkeln sagen ?
c) Was kannst du über ein unregelmäßiges und punktsymmetrisches Viereck sagen ?
d) Was kannst du über ein regelmäßiges Viereck sagen ?

B5) Achteck und Quadrat
a) Zeichne ein Quadrat ABCD mit 10 cm Seitenlänge.
b) Zeichne den Umkreis dieses Quadrates und nenne M seinen Mittelpunkt.
c) Berechne AC und AM.
d) Zeichne, mit Hilfe des Quadrates ABCD, ein regelmäßiges Achteck.
e) Berechne den Mittelpunktswinkel dieses Achtecks.

B6) Wie groß sind Mittelpunktswinkel α und Innenwinkel β im regelmäßigen Zehneck und im regelmäßigen Siebeneck ?

B7) Richtig oder falsch ?
a) Jedes gleichseitige Dreieck ist ein regelmäßiges Vieleck.
b) Jedes gleichseitige Viereck ist ein regelmäßiges Vieleck.

B8) Wie viele Symmetrieachsen hat
a) ein regelmäßiges Viereck ?
b) ein regelmäßiges Fünfeck ?
c) ein regelmäßiges Sechseck ?
d) ein regelmäßiges Zehneck ?
e) ein regelmäßiges n- Eck ?
f) ein Kreis ?

B9) Berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechsecks, das in einem Kreis mit dem Durchmesser 16 cm einbeschrieben ist. Runde auf zwei Dezimalen.

B10) a) Wie lang ist die Seite eines Quadrates, dessen Diagonale 12 cm lang ist ?
b) Welchen (1) Umfang, (2) Flächeninhalt, hat ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe 9 cm ?

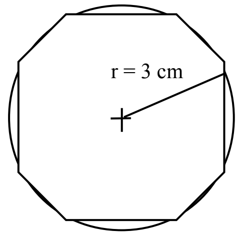
B11) ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, das in einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius 4 cm einbeschrieben ist.
a) Zeichne eine Figur.
b) Berechne (mit Hilfe der Trigonometrie) die Länge AB in cm. Runde dann auf 1 mm auf.
(Siehe Einstieg 5)

B12) a) Welchen Flächeninhalt hat ein gleichseitiges Dreieck mit Umfang 1 m ?
b) Welchen Umfang hat ein 1 m^2 großes gleichseitiges Dreieck ?

B13) a) Wie viele Ecken hat ein regelmäßiges Vieleck, dessen Innenwinkel 135° messen ?
b) Gibt es ein regelmäßiges Vieleck mit (1) dem Mittelpunktswinkel α = 15°, (2) dem Innenwinkel β = 100°? Begründe deine Antwort.

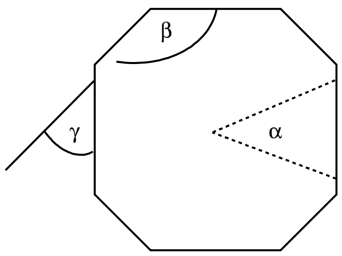
B14) a) Zeichne ein regelmäßiges Sechseck mit 4 cm langen Seiten.
b) Wie lang sind in diesem Sechseck die Diagonalen, welche eine Ecke überspringen ?

B15) Ein regelmäßiges Achteck ist in einem Kreis mit dem Radius r = 3 cm einbeschrieben. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Achtecks. Runde auf zwei Dezimalen.



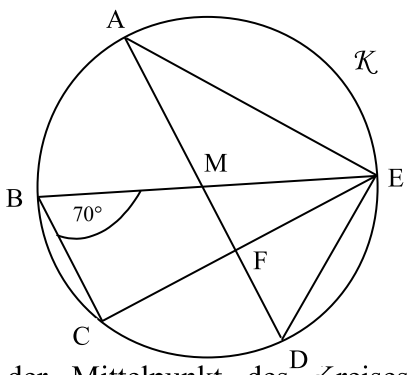
B16) Berechne den Winkel γ im folgenden regelmäßigen Achteck.

Anleitung : berechne zuerst den Mittelpunkts-winkel α und den Innenwinkel β .



D) ZUM KNOBELN UND WEITERARBEITEN

C1)



M ist der Mittelpunkt des Kreises $\mathcal{K}$. Die Geraden (AD) und (CE) sind zueinander senkrecht. In dieser Aufgabe, musst du einige Winkelgrößen bestimmen. Begründe jeweils deine Behauptungen.

1. a) Was kannst du über das Dreieck BCE sagen?
b) Schließe daraus die Größe des Winkels .

2. a) Was kannst du über die Geraden (BC) und (AD) sagen ?
b) Schließe daraus die Größe des Winkels .
c) Schließe daraus die Größe des Winkels .

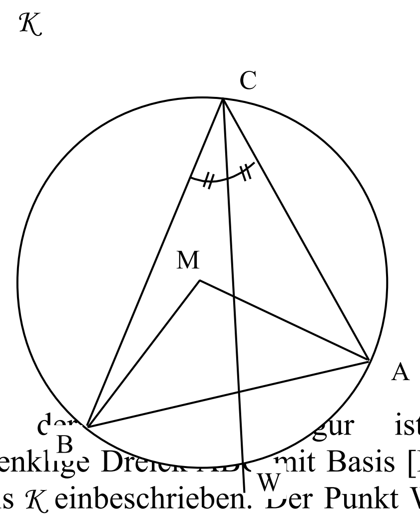
3. a) Was kannst du über das Dreieck AEM sagen ?
b) Schließe daraus die Größe des Winkels .
c) Berechne die Größe des Winkels .

C2) a) Zeichne ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF, das in einem Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunt M einbeschrieben ist.
b) Beweise, dass das Viereck ABDE ein Rechteck ist.

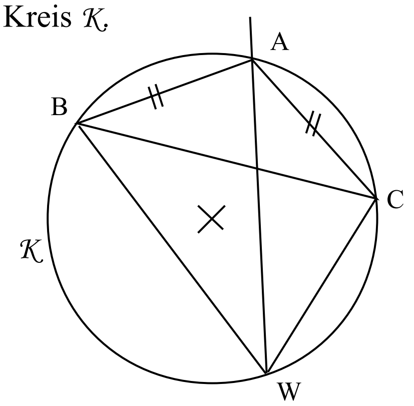
C3) Zeichne ein unregelmäßiges Sechseck mit gleichlangen Seiten.

C4) Zeichne ein unregelmäßiges Sechseck mit gleichgroßen Winkeln.

C5) In der folgenden Figur liegen die Punkte A, B und C auf dem Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunkt M. Die Winkelhalbierende von schneidet den Kreis im Punt W.
a) Beweise, dass : = .
b) Schließe daraus, dass die Gerade (MW) die Mittelsenkrechte der Strecke [AB] ist.

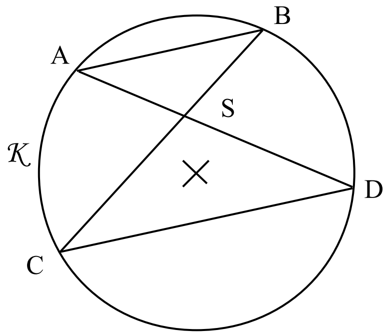


C6) In der folgenden Figur ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit Basis [BC] in dem Kreis $\mathcal{K}$ einbeschrieben. Der Punkt W liegt auf dem Kreis $\mathcal{K}$.



Beweise, dass die Halbgerade [WA) die Winkelhalbierende von ist.

C7) In der folgenden Figur sind [AB] und [CD] zwei parallele Sehnen des Kreises $\mathcal{K}$.



a) Beweise, dass : = = =

b) Was kannst du über die Dreiecke BAS und CSD sagen ?

c) Schließe daraus, dass : CB = AD.

C8)

1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck AMB mit 6 cm Seitenlänge.

2. Zeichne :

a) den Punkt E, Bildpunkt von B bei der Punktspiegelung an M ;

b) den Punkt F, Bildpunkt von B an der Spiegelachse (MA) ;

c) den Punkt D, Bildpunkt von A bei der Punktspiegelung an M ;

d) den Punkt C, Bildpunkt von A an der Spiegelachse (MB).

3. a) Zeichne das Vieleck ABCDEF.

b) Ist dieses Vieleck ein Fünfeck, ein Sechseck oder ein Achteck ? Begründe deine Antwort.

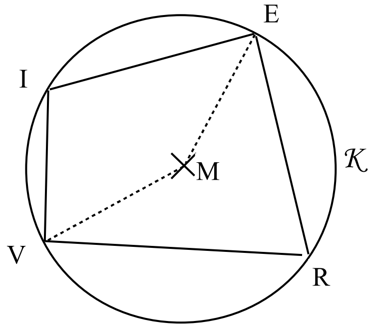
c) Ist es ein regelmäßiges Vieleck ? Begründe deine Antwort.

4. Wir nehmen nun an, dass die Höhe des Dreiecks AMB 5,2 cm lang ist. Berechne :

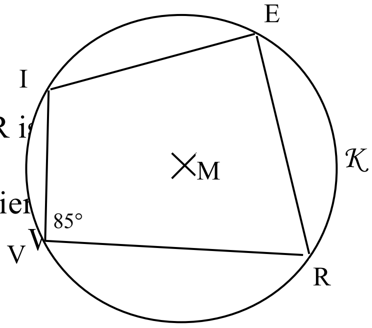
a) den Flächeninhalt des Dreiecks AMB ;

b) den Flächeninhalt des Vielecks ABCDEF.

C9)



Das beliebige Viereck VIER i
einbeschrieben.
Beweise, dass im Vie
gegenüberliegenden
Supplementärwinkel sind.

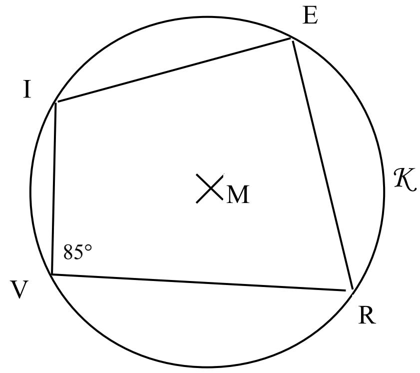


Anleitungen :

1) Denke an den Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz

2) Die Größe eines Vollwinkels beträgt 360°

C10)



Das beliebige Viereck VIER ist in einem Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunt M einbeschrieben.

Es gilt : = 85°

Berechne die Größe des Winkels .

Anleitung : Siehe Aufgabe C9.

C11) Richtig oder falsch ?

a) Die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Kreis $\mathcal{K}$.

Behauptung : =

b) Das Viereck BDCE ist in einem Kreis $\mathcal{K}$ einbeschrieben. Die Diagonalen schneiden sich im Punkt M. = 35° und = 72°.

Behauptung : M ist der Mittelpunkt des Kreises.

c) ABC ist ein Dreieck so, dass = 30° und BC = 4 cm.

Behauptung : Der Umkreisradius dieses Dreiecks ist 4 cm lang.

d) ABC ist ein Dreieck so, dass = 85° und = 50°. M ist der Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks.

Behauptung : MBC ist ein gleichschenkliges-rechtwinkliges Dreieck.

e) Ein regelmäßiges Sechseck ist in einem Kreis mit Durchmesser 5 cm einbeschrieben.
Behauptung : Der Umfang dieses Sechsecks beträgt 30 cm.

f) ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck.
Behauptung : ACE ist ein gleichseitiges Dreieck.

g) Behauptung : In einem regelmäßigen Fünfeck gibt es fünf Symmetrieachsen.

h) Behauptung : In einem Sechseck gibt es sechs Symmetrieachsen.

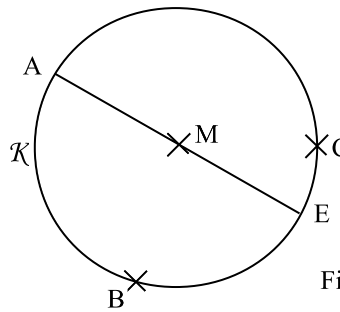
C12) a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines regelmäßigen Vierecks (Fünfecks, Sechsecks, Achtecks).
b) Wie kann man die Anzahl der Diagonalen eines regelmäßigen n- Ecks bestimmen ?

C13) Stimmt das : wenn man von einem regelmäßigen Dreieck die Ecken abschneidet, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck ? Begründe deine Antwort.

E) SACHAUFGABE

(Aus « Brevet, Groupe Nord, sept. 2000 »)
Die Teile I, II und III sind voneinander unabhängig.

Teil I
Übertrage folgende Figur 1 auf dein Arbeitsblatt und ergänze sie.
Die Punkte B und C liegen auf dem Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunkt M und Durchmesser [AE].



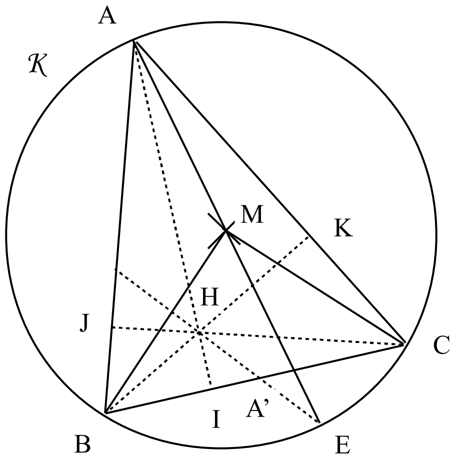
Figur 1

a) Beweise, dass ACE und ABE rechtwinklige Dreiecke sind.
b) Die Parallele zu (EC), die durch B geht schneidet [AC] im Punkt K. Die Parallele zu (EB), die durch C geht schneidet [AB] im Punkt J. (BK) und (CJ) schneiden sich im Punkt H.
Beweise, dass BHCE ein Parallelogramm ist.
c) Zeichne den Mittelpunt A' der Strecke [BC]. Beweise, dass A' der Mittelpunkt der Strecke [HE] ist.
d) Beweise, dass im Dreieck AHE :

$$AH = 2 \times MA'.$$

e) Beweise, dass H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.

Teil II
Gegeben ist folgende Figur 2.
Das Dreick ABC ist im Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunkt M einbeschrieben. Es gilt : = 90°.



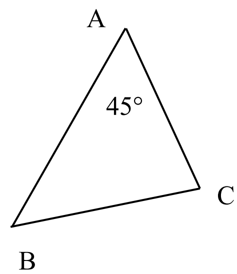
Figur 2

a) Wie groß ist der Winkel ? Begründe.
b) A' ist der Mittelpunkt der Strecke [BC].
Beweise, dass : MA' = BC
c) H ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Erinnere dich, dass :

$$AH = 2 \times MA'.$$

Schließe daraus, dass : AH = BC

Teil III
Gegeben ist folgendes Dreick ABC : = 45°.



a) Zeichne die Höhe h_c. Sie schneidet die Strecke [AB] im Punkt J.
Beweise, dass : JC = JA.
b) Zeichne die Höhe h_a. Sie schneidet die Strecke [BC] im Punkt I und die Strecke [JC] im Punkt H. Beweise, dass :
=
c) Berechne, im Dreieck HJA, tan und im Dreieck BJC, tan.
Schließe daraus, dass : JB = JH.