Thema Nr. 10 :

RECHTWINKLIGES DREIECK UND UMKREIS

Erinnere dich...

Umkreis eines rechtwinkligen Dreiecks :

**Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist,
dann liegt sein Umkreismittelpunkt in der Mitte seiner Hypotenuse.**

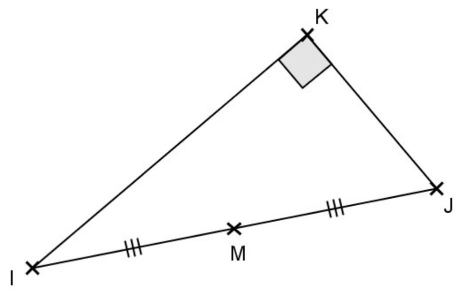
Merke :

- Daraus schließen wir, dass der Durchmesser des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks seine Hypotenuse ist.
- Bei einem rechtwinkligen Dreieck liegt also die Mitte der Hypotenuse gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt.
- "Umkehrung des Satzes des Thales" (*in Deutschland*)

  Pour votre culture mathématique allemande...

  Die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, deren Schenkel durch A und B verlaufen, liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser [AB].

Beweis : Siehe Übung 1



Beispiel :
IJK ist ein in K rechtwinliges Dreieck.
M ist der Mittelpunkt von [IJ] und IJ = 6cm
Berechne MK !

- Wir wissen, dass IJK ein in K rechtwinkliges Dreieck ist.
- Außerdem gilt die Eigenschaft :
  Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann liegt sein Umkreismittelpunkt in der Mitte seiner Hypotenuse.
- Daraus schließen wir, dass M der Umkreismittelpunkt von IJK ist :

$$MI = MJ = MK = \frac{IJ}{2} = 3\,cm$$

Sehnendreieck :

Wenn bei einem Sehnendreieck eine Seite ein Durchmesser des Kreises ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig und seine Hypotenuse ist der Durchmesser des Kreises.

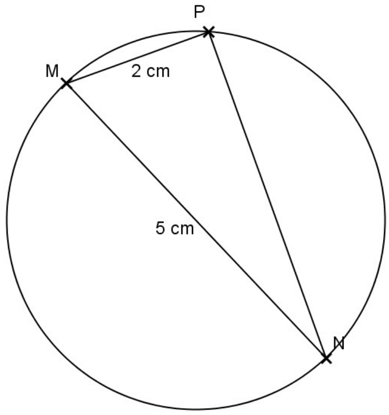
Merke :
"Satz des Thales" (in Deutschland) :
Jeder Umfangswinkel über einem Halbkreis (bzw. über dem Durchmesser eines Kreises) ist ein rechter Winkel.

Beweis : Siehe Übung 5

Beispiel :

P gehört zum Kreis mit Durchmesser [MN]
MN = 5 cm und PM = 2.

Berechne PN !



- Wir wissen dass MNP ein Sehnendreieck des Kreises mit Durchmesser [MN] ist.
- Außerdem gilt die Eigenschaft :
  Wenn bei einem Sehnendreieck eine Seite Durchmesser des Kreises ist,
  dann ist das Dreieck rechtwinklig und seine Hypotenuse ist der Durchmesser des Kreises.
- Daraus schließen wir, dass MNP ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse [MN] ist : MNP ist rechtwinklig in P.

- Jetzt wissen wir, dass MNP ein in P rechtwinkliges Dreieck.
- Also ist die Gleicheit des Pythagoras erfüllt :
  $MN^2 = MP^2 + PN^2$
  $5^2 = 2^2 + PN^2$
  $25 = 4 + PN^2$
  $PN^2 = 21$
  $PN \approx 4,6$ cm

Wortschatz :

– das Sehnendreieck : le triangle inscrit dans un cercle
– le cercle circonscrit à un triangle rectangle est appelé en Allemagne "Thaleskreis"

Ein paar Übungen...

Übung 1

Zeichne ein in B rechtwinkliges Dreieck ABC. Benenne I den Mittelpunkt der Seite [AB]. Die Mittelsenkrechte von [AB] schneidet (AC) in O.

1. Wo liegt O ? Beweise es !
2. Durch welchen Punkt verläuft die Mittelsenkrechte der Seite [AC] ?
3. Wo liegt der Mittelpunkt des Umkreises von ABC ?

Cet exercice propose une démonstration de la 1ère propriété du cours en utilisant le théorème des milieux

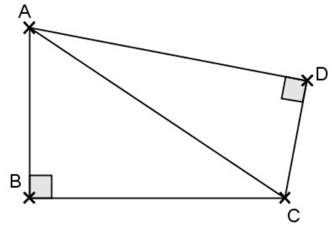
Übung 2

Zeichne ein Dreieck EFG, sodass : $\widehat{EFG} = 34°$, $\widehat{EGF} = 56°$

Beweise, dass der Kreis mit Durchmesser [FG] durch E verläuft.

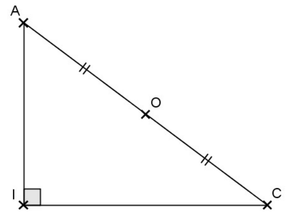
Übung 3

Beweise, dass die Punkte A, B, C, D zu dem Kreis mit Durchmesser [AC] gehören.



Übung 4

AI = 3 cm.
IC = 4 cm.
Wie lang ist [IO] ?



Übung 5

Zeichne einen Kreis mit seinem Durchmesser [BC] und ein Sehnendreieck ABC des Kreises. Zeichne anschließend den Durchmesser [AD] des Kreises.

1. Was ist ABDC für ein Viereck ? Beweise es !
2. Was kannst du daraus für das Dreieck ABC schließen ?

Cet exercice propose une démonstration de la 2ème propriété du cours en utilisant les propriétés des parallélogrammes

Übung 6

MNP ist ein gleichseitiges Dreieck.
R ist der Bildpunkt von N bei der Punktsymmetrie an P.
Berechne $\widehat{MRN}$!

Übung 7

Zeichne um einen Punkt O einen Kreis mit dem Radius 5 cm.
Zeichne einen Durchmesser [MN] des Kreises.
P liegt auf dem Kreis, sodass : PM = 4 cm.
Berechne PN !

Übung 8

[HI] und [IJ] sind die Durchmesser von (K) und (K').
(g) läuft durch I und schneidet (K) und (K') in D und F.
Beweise, dass : $\widehat{IHD} = \widehat{IJF}$