Thema Nr.5 :

DER STRAHLENSATZ

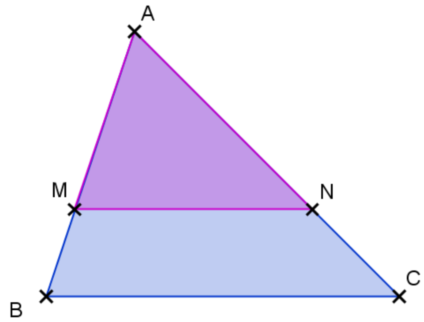
Erinnere dich...

Was wir aus der 4ème wissen :

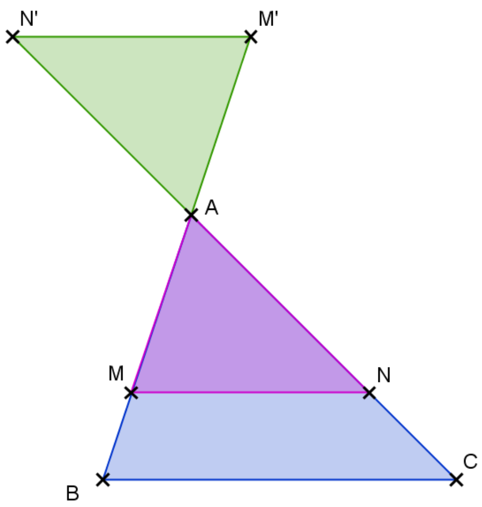
Wir interessieren uns für das Dreieck ABC.
Wenn :

- M є [AB]
- N є [AC].
- (MN) // (BC),

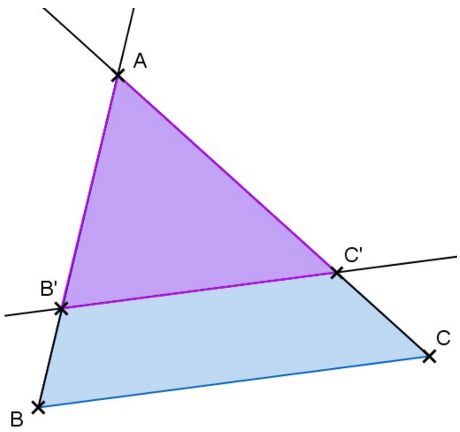
dann gilt : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

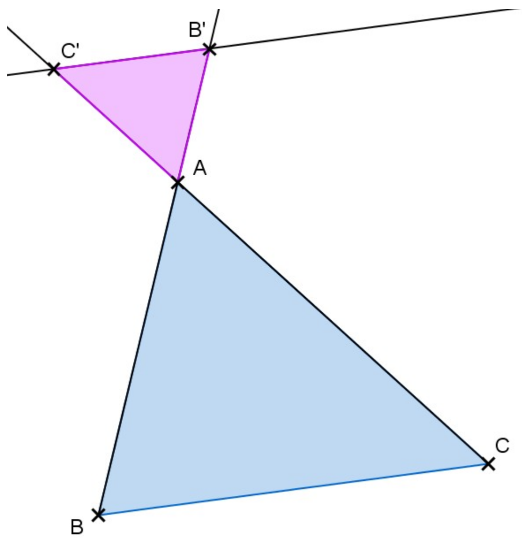


Was passiert jetzt, wenn wir M' und N', die Bildpunkte von M und N bei der Punktsymmetrie an A zeichnen ?



Was wir jetzt in der 3ème behaupten können :





Wir interessieren uns für das Dreieck ABC.
Wenn :

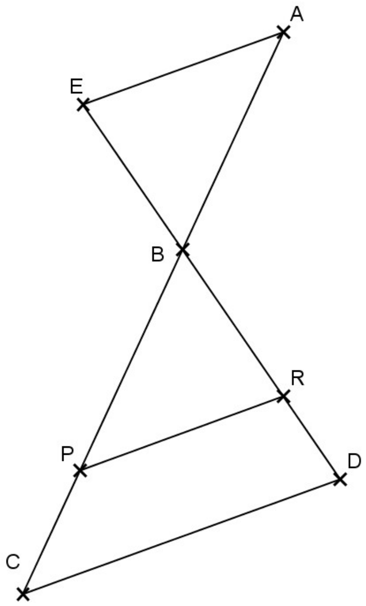
- B' є (AB)
- C' є (AC).
- (B'C') // (BC),

dann gilt : $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

Merke :

$k = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{AC}$ heißt, dass die Längen der Dreiecke ABC und AB'C' proportional zueinander sind.

Beispiel :



Die Geraden (EA), (PR) und (CD) sind parallel zueinander.
Es gilt : EB = 2 cm, BD = 5 cm, PR = 4 cm und CD = 6 cm.

Berechne BR und EA. Gib den exakten Wert an.

Lösung :

Im Dreieck BCD gilt :

- *P ϵ (BC)*
- *R ϵ (BD)*
- *(PR) // (CD)*

Nach dem Strahlensatz gilt also :

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BR}{BD} = \frac{PR}{CD}$$

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BR}{5} = \frac{4}{6}$$

$$BR = \frac{5 \times 4}{6}$$

$$BR = \frac{10}{3} cm$$

Im Dreieck BCD gilt :

- *A ϵ (BC)*
- *E ϵ (BD)*
- *(AE) // (CD)*

Nach dem Strahlensatz gilt also :

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC} = \frac{EA}{DC}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{BA}{BC} = \frac{EA}{6}$$

$$EA = \frac{6 \times 2}{5}$$

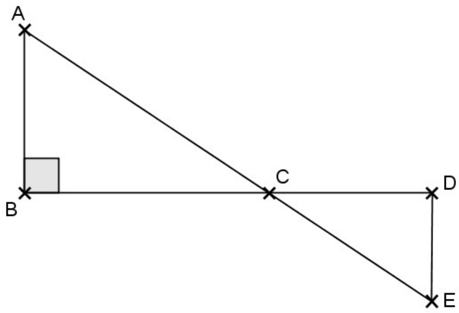
$$EA = 2{,}4\, cm$$

Ein paar Übungen...

Übung 1

1. Zeichne einen Kreis (*C*) um einen Punkt O mit dem Durchmesser [AB] (es soll gelten : AB=6 cm).
2. M liegt so auf dem Kreis, dass BM = 3,6 cm. Berechne AM (Runde auf Zehntel).
3. P liegt auf der Strecke [AB], sodass PA = 4,5 cm. Zeichne die Parallele zu (MB) durch den Punkt P. Sie schneidet [AM] in R. Berechne AR und RP.

Übung 2



Das Dreieck ABC ist rechtwinklig in B.

C ϵ [BD] und C ϵ [AE].

BC = 12 cm ; CD = 9,6 cm; DE = 4 cm; CE = 10,4 cm.

1) Beweise, dass das Dreieck CDE rechtwinklig in D ist.Was kannst du daraus über die Geraden (AB) und (DE) schließen ? Begründe ! .

2) Berechne AB.

Übung 3

1. Zeichne einen Kreis (*C*) mit dem Mittelpunkt O und mit dem Durchmesser [AB] (AB=10 cm). M liegt auf [OB] so dass OM = 3 cm . Zeichne die Senkrechte zu der Geraden (AB) durch den Punkt M. Sie schneidet den Kreis (*C*) in E.
2. Berechne ME. Begründe deine Antwort.
3. Zeichne die Tangente an den Kreis (*C*) in dem Punkt A: sie schneidet (OE) in F.

   a) Beweise, dass die Geraden (AF) und (ME) parallel zueinander sind.

   b) Berechne den Umfang des Dreiecks AOF.

Übung 4

ABC ist ein Dreieck, sodass AB = 4,2 cm; AC = 5,6 cm und BC = 7 cm.
Außerdem gilt :

- M liegt auf der Strecke [BC] (M ≠ B und M ≠ C)
- Die Senkrechte zu der Geraden (AB) durch den Punkt M schneidet [AB] in H
- Die Senkrechte zu der Geraden (AC) durch den Punkt M schneidet [AC] in K

1. Beweise, dass ABC rechtwinklig in A ist.
2. Beweise, dass die Geraden (HM) und (AK) parallel zueinander sind

Teil 1 *:*
In diesem Teil gilt : BM = 1,4 cm.

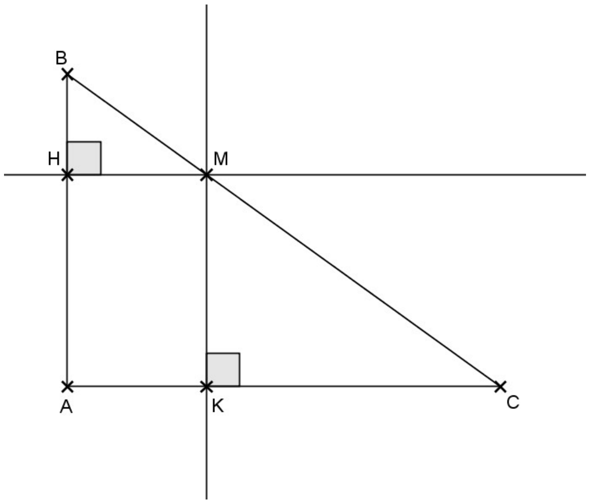
3. Berechne BH und HM, und schließe daraus AH.
4. Berechne den Umfang des Rechtecks AHMK.

Teil 2

In diesem Teil gilt $BM = x$ *cm.(0<* x *< 7)*

5. Beweise, dass $HM = 0{,}8\,x$ und dass $BH = 0{,}6\,x$. Schließe daraus, dass $AH = 4{,}2 - 0{,}6\,x$.
6. Bestimme den Umfang des Rechtecks AHMK in Bezug auf x.
7. Berechne den Wert von x so, dass HM = AH.
8. Ist in diesem Fall AHMK ein besonderes Rechteck ? Berechne seinen Umfang.

Verbesserung der Übung 4



1. Bei dem Dreieck ABC ist die längste Seite [BC].
Außerdem gilt :

- $BC^2 = 7^2 = 49$
- $AB^2 + AC^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49$

Die Gleichheit des Pythagoras ist erfüllt, daher ist das Dreieck ABC rechtwinklig in A

2. (HM) und (KA) sind beide rechtwinklig zu (AB), daher sind sie parallel zueinander

Teil 1 : BM = 1,4 cm

3. Für die Dreiecke BAC und BHM gilt :

- $H \in (BA)$
- $M \in (BC)$
- $(HM) \| (AC)$

Nach dem Strahlensatz gilt also :

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{HM}{AC} \qquad BH = \frac{1{,}4 \times 4{,}2}{7} = 0{,}84\,cm$$

$$\frac{BH}{4{,}2} = \frac{1{,}4}{7} = \frac{HM}{5{,}6} \qquad HM = \frac{1{,}4 \times 5{,}6}{7} = 1{,}12\,cm$$

4. $U = AH \times 2 + HM \times 2 = (4{,}2 - 0{,}84) \times 2 + 1{,}12 \times 2 = 6{,}72 + 2{,}24 = 8{,}96\,cm$

Teil 2 : BM = x cm

5. Für die Dreiecke BAC und BHM gilt :

- $H \in (BA)$
- $M \in (BC)$
- $(HM) \| (AC)$

Nach dem Strahlensatz gilt also :

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{HM}{AC} \qquad BH = \frac{x \times 4{,}2}{7} = x \times \frac{4{,}2}{7} = x \times 0{,}6 = 0{,}6\,x$$

$$\frac{BH}{4{,}2} = \frac{x}{7} = \frac{HM}{5{,}6} \qquad HM = \frac{x \times 5{,}6}{7} = x \times \frac{5{,}6}{7} = 0{,}8\,x$$

$$AH = AB - BH = 4{,}2 - 0{,}6\,x$$

6. $U(x) = AH \times 2 + HM \times 2 = (4{,}2 - 0{,}6\,x) \times 2 + 0{,}8\,x \times 2 = 8{,}4 - 1{,}2\,x + 1{,}6\,x = 8{,}4 + 0{,}4\,x$

7. $HM = AH$

$0{,}8\,x = 4{,}2 - 0{,}6\,x$

$0{,}8\,x + 0{,}6\,x = 4{,}2$

$1{,}4\,x = 4{,}2$

$x = \frac{4{,}2}{1{,}4}$

$x = 3$

8. Wenn $x = 3$, dann ist AHMK ein Quadrat mit der Seitenlänge $0{,}8 \times 3 = 2{,}4$ und sein Umfang beträgt : $2{,}4 \times 4 = 9{,}6\,cm$ oder $U(3) = 8{,}4 + 0{,}4 \times 3 = 8{,}4 + 1{,}2 = 9{,}6\,cm$