

GLEICHUNGSSYSTEME

Erinnere dich...

Eine Gleichung mit zwei Variablen

Beispiel :

$$4x + 2y = 2$$

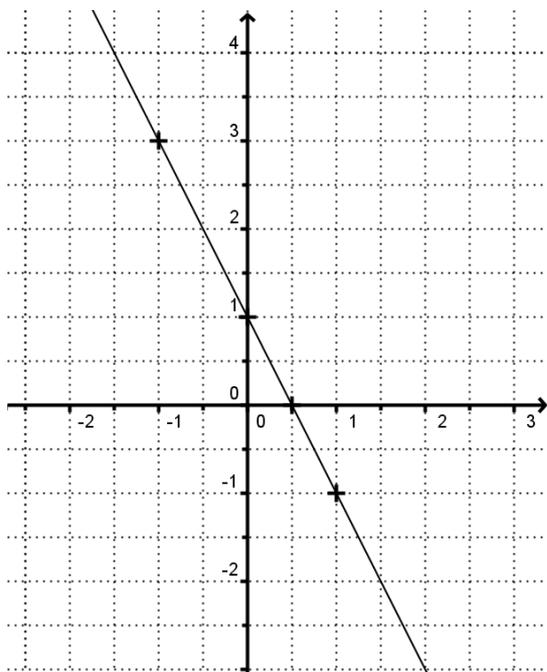
Wenn $x=1$ dann gilt $y=-1$

Wenn $x=0$ dann gilt $y=1$

Wenn $x=0,5$ dann gilt $y=0$

Wenn $x=-1$ dann gilt $y=3$

Um alle Lösungen zu veranschaulichen, kann man sie in einem Koordinatensystem darstellen :



$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 2 \\ 2y &= -4x + 2 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

Es handelt sich also um die grafische Darstellung der linearen Funktion $x \rightarrow -2x + 1$

Zwei Gleichungen mit zwei Variablen

Grafisches Lösen

Beispiel :

Welches Zahlenpaar $(x ; y)$ erfüllt gleichzeitig $x+y=-1$ und $4x+2y=6$?

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 4x+2y=6 \end{cases} \text{ ist gleichbedeutend mit : } \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=3 \end{cases} \text{ also mit } \begin{cases} y=-x-1 \\ y=-2x+3 \end{cases}$$

Wertetabellen :

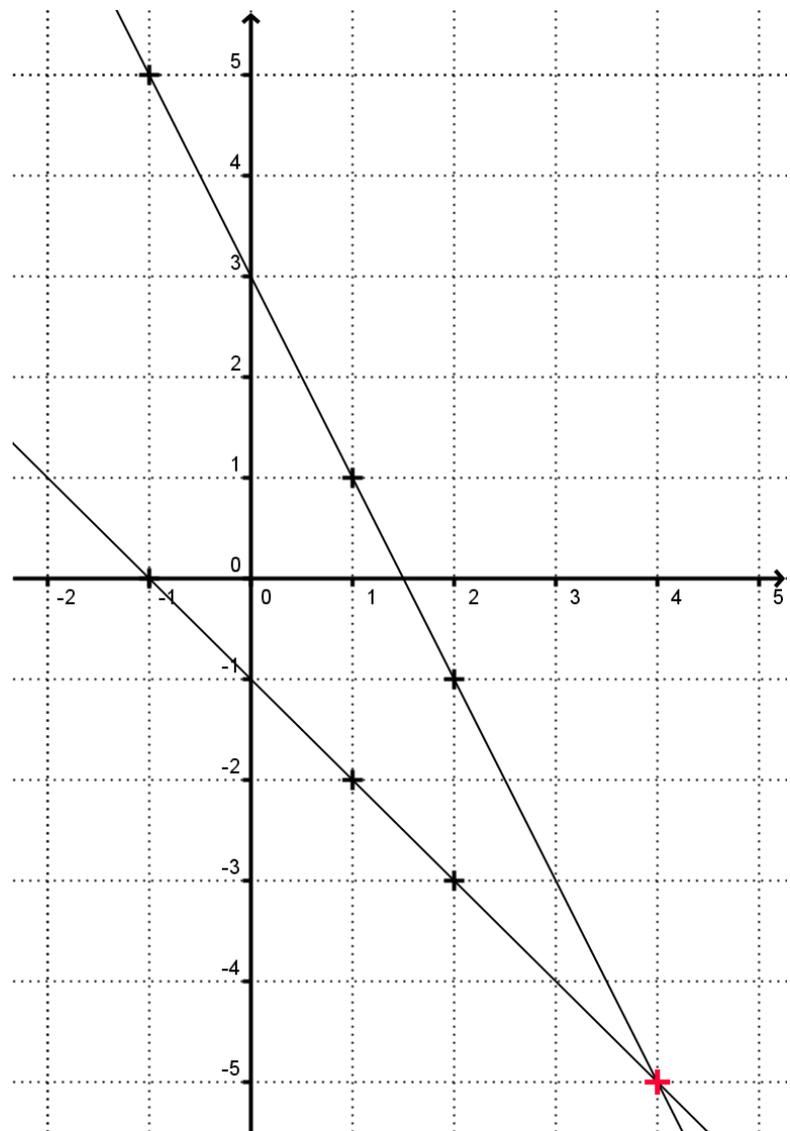
x	1	-1	2
y	-2	0	-3

und

x	1	-1	2
y	1	5	-1

Die Lösung scheint das Zahlenpaar $(4 ; -5)$ zu sein !

Durch Einsetzen in die zwei ursprünglichen Gleichungen kann diese Vermutung nachgeprüft werden.



Leider ist dieses Verfahren nicht immer genau genug... was passiert zum Beispiel, wenn die Lösungen keine Dezimalzahlen sind ?

Rechnerisches Lösen

Das Einsetzungsverfahren

Beispiel :

3 Brötchen und 2 Croissants kosten 5€60
1 Brötchen und 3 Croissants kosten 5€20

Wie teuer ist 1 Brötchen ?

Wie teuer ist 1 Croissant ?

x bezeichnet den Preis eines Brötchens.

y bezeichnet den Preis eines Croissants.

Welches Zahlenpaar $(x ; y)$ erfüllt gleichzeitig $3x+2y=5,6$ und $x+3y=4,2$?

$$\begin{cases} 3x+2y=5,6 \\ x+3y=4,2 \end{cases} \text{ ist gleichbedeutend mit } \begin{cases} 3x+2y=5,6 & (G1) \\ x=-3y+4,2 & (G2) \end{cases}$$

- Wir setzen jetzt $-3y+4,2$ für x in der ersten Gleichung (G1) ein :

$$3(-3y+4,2)+2y=5,6$$

$$-9y+12,6+2y=5,6$$

$$12,6-7y=5,6$$

$$-7y=-7$$

also wissen wir jetzt, dass $y=1$

- Wir setzen jetzt 1 für y in der zweiten Gleichung (G2) ein :

$$x=-3 \times 1+4,2$$

$$x=-3+4,2$$

das heißt, dass

$$x=1,2$$

- Das Lösungspaar ist $(1,2 ; 1)$
Ein Brötchen kostet 1€20 und ein Croissant kostet 1€.

Das Gleichsetzungsverfahren

Beispiel :

3 Brote und 2 Stück Kuchen kosten 16€
4 Brote und 5 Stück Kuchen kosten 26€

Wie teuer ist 1 Brot ?
Wie teuer ist 1 Stück Kuchen ?

x bezeichnet den Preis eines Brotes.

y bezeichnet den Preis eines Kuchenstücks.

Welches Zahlenpaar $(x ; y)$ erfüllt gleichzeitig $3x+2y=16$ und $4x+5y=26$?

$$\begin{cases} 3x+2y=16 \\ 4x+5y=26 \end{cases} \begin{array}{l} \times 4 \\ \times (-3) \end{array} \text{ ist gleichbedeutend mit } \begin{cases} 12x+8y=64 & (G1) \\ -12x-15y=-78 & (G2) \end{cases}$$

- Wir können die Gleichungen (G1) und (G2) addieren, es kommt eine neue Gleichung – mit der einzigen Unbekannten y – raus !

$$12x+(-12x)+8y+(-15y)=64+(-78) \quad \text{Also wissen wir jetzt, dass } \boxed{y=2}$$
$$-7y=-14$$

- Wir setzen jetzt 2 für y in einer der beiden Anfangsgleichungen ein :

$$3x+2 \times 2=16$$
$$3x+4=16 \quad \text{das heißt, dass } \boxed{x=4}$$
$$3x=12$$

- Das Lösungspaar ist $(4 ; 2)$
Ein Brot kostet 4€ und ein Stück Kuchen kostet 2€.

Ein paar Übungen...

Übung 1

Uns interessiert die Gleichung mit den Unbekannten x und y : $2x+5y=7$

- 1) Löse diese Gleichung nach y aus, wenn gilt : $x=1$
- 2) Löse diese Gleichung nach x aus, wenn gilt : $y=-1$
- 3) Stelle alle Lösungen in einem Koordinatensystem dar.

Übung 2

Maria möchte für die Geburtstagsfeier ihres Sohnes Anton Eis kaufen.

In der Eistruhe im Supermarkt gibt es zwei verschiedene Sorten : die erste kostet 0,75€ pro Stück und die zweite 0,60€.

Wieviel Stück von jeder Sorte kann sie kaufen, wenn sie 15€ dafür ausgeben möchte ?

Übung 3

Welches Gleichungssystem hat die Lösung (2 ; 1) ?

a)
$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x+y=3 \\ 4x-3y=5 \end{cases}$$

Übung 4

Uns interessiert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x+y=-3 \end{cases}$$

Welches Zahlenpaar ist eine Lösung ?

a) (2 ; -3)

b) (-2 ; 3)

Übung 5

Löse folgende Gleichungssysteme :

a)
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

Übung 6

Löse folgende Gleichungssysteme :

a)
$$\begin{cases} 3x+4y=9 \\ 5x+6y=14 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6x-5y=-12 \\ -7x+3y=-32 \end{cases}$$

Übung 7

Ein Ordner ist 1€ teurer als ein Heft.

Zwei Ordner und drei Hefte kosten zusammen 17€.

Wie teuer ist ein Heft ? Wie teuer ist ein Ordner ?

Übung 8

Bei einem Blumhändler kosten 3 Iris und 4 Rosen 12€. 5 Iris und 6 Rosen kosten 18,80€.

Wie teuer ist eine Iris ? Wie teuer ist eine Rose ?