CHANGEMENT DE REGISTRE

f et g désignent des fonctions définies pour tout réel x, dont les courbes représentatives dans un repère sont notées C_f et C_g.

Voici une liste de propriétés graphiques de ces courbes :

- Le point M(–1 ;7) est situé sur C_f.
- Le point N(2 ;5) est situé au-dessus de C_g.
- C_f est située au-dessus de l'axe des abscisses
- C_g est située strictement en-dessous de la droite d'équation $y=3$ sur l'intervalle]5 ;+ ∞ [.
- C_f est située au-dessus de C_g sur l'intervalle] –3 ;2].
- C_f et C_g ont deux points d'intersection notés A et B.
- Le milieu de chaque segment vertical [PQ] où P est un point de C_f et Q un point de C_g est situé sur la droite horizontale d'équation $y=1$.

Compléter pour chaque propriété graphique la phrase suivante (traduction algébrique de la propriété).

Pour x ……………..……… , **« Ensemble de nombres »**	on a : ……………………………………………… **« Égalité ou inégalité faisant intervenir *f(x)* ou *g(x)* »**

Niveau minimum :

Classe de 2^{de} / 1^e

Thèmes :

Courbe représentative d'une fonction
Ensemble de nombres
Egalités et inégalités
Coordonnées dans un repère

Méthodes - compétences :

Logique
Traduction algébrique d'une propriété graphique (savoir passer d'un mode d'expression à un autre)

Commentaires :

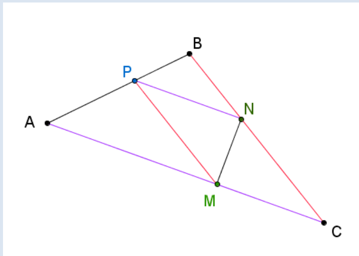
Expérimentée en 1^e S, cette activité a permis de reprendre et d'asseoir les définitions de coordonnées et de courbes représentatives dans un repère.
Pour faciliter la compréhension, le premier cas pourra éventuellement être traité avec les élèves.

Éléments de solution :

Pour $x=-1$: $f(x)=7$
Pour $x=2$: $g(x)\leq 5$
Pour $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq 0$
Pour $x\in\,]5;+\infty[$: $g(x)<3$
Pour $x\in\,]-3;2]$: $f(x)\geq g(x)$
Pour $x=x_A$ et $x=x_B$: $f(x)=g(x)$
Pour $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{f(x)+g(x)}{2}=1$

DROITES PARALLELES DANS TRIANGLE

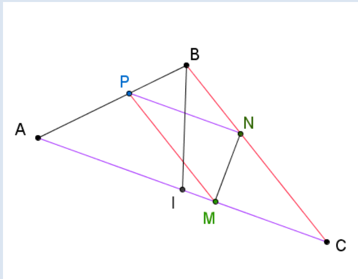
Dans un triangle ABC, on place un point P sur le segment [AB].
Par le point P, on mène les droites parallèles aux côtés (BC) et (AC).
Ces droites rencontrent respectivement les côtés [AC] et [BC] en M et N.



1) a) Connaissez-vous une position du point P pour laquelle la droite (MN) obtenue est parallèle à (AB) ?

b) Cette position est-elle unique ?

2) Existe-t-il une position du point P pour laquelle la droite (MN) est parallèle à la médiane (BI) ?



Aide :

On pourra raisonner en introduisant le repère (C, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$).

Niveau minimum :

Classe de 1^{e} S

Thèmes :

Géométrie plane
Vecteurs
Repère
Colinéarité
Droite des milieux

Méthodes - compétences :

Introduire un repère.
Traduction vectorielle de propriétés géométriques.
Distinguer condition nécessaire et condition suffisante.

Commentaires :

Un problème intéressant sur la question des conditions suffisantes.
L'introduction d'un repère facilite nettement le raisonnement et est une bonne application des points du programme portant sur la colinéarité.

Éléments de solution :

1) P milieu du segment [AB].

2) P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

GENETIQUE

Le gène est l'unité de base de l'information génétique et détermine les caractéristiques de chacun comme la couleur des yeux, de la peau, la taille etc. Les gènes fonctionnent par paire (un provient de la mère et un provient du père).

La mucoviscidose est une maladie génétique.
Lorsque les deux parents sont porteurs du gène responsable de la mucoviscidose et conçoivent un enfant ensemble, ce dernier a un risque sur quatre d'être atteint par la maladie. Lors de chaque grossesse le même risque est encouru. L'enfant atteint de mucoviscidose est donc porteur à la fois du gène défectueux de son papa et de celui de sa maman.

Si l'enfant a un seul gène défectueux, la maladie ne se déclare pas. On dit alors qu'il est porteur sain. Les porteurs sains ne le savent pas car ils ne souffrent d'aucun symptôme.

Lorsque les deux parents sont porteurs sains, il y a équiprobabilité pour chacun de transmettre un gène sains ou un gène porteur de la maladie. L'enfant héritera selon les cas :

- Cas 1 : de deux gènes sains. L'enfant est sain et non porteur de la maladie.
- Cas 2 : d'un gène sain et d'un gène défectueux. L'enfant est sain mais porteur de la maladie.
- Cas 3 : de deux gènes défectueux. L'enfant est atteint de mucoviscidose.

1) Construire un arbre de probabilité de la transmission de la maladie parents-enfants, dans le cas où les deux parents sont des porteurs sains. Et préciser alors la probabilité pour un enfant d'être dans chacun des trois cas possibles.

2) Si un homme et une femme sont sains, de parents sains, mais ont chacun un frère malade. Quelle est la probabilité qu'ils aient ensemble un enfant malade ?

Niveau minimum :

Classe de 1^e

Thèmes :

Probabilités conditionnelles
Arbre de probabilités
Répétition d'expérience

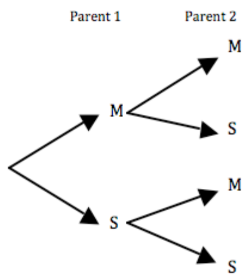
Méthodes - compétences :

Modéliser la situation avec un arbre
Raisonner à partir d'un arbre

Commentaires :

Une information implicite dans l'énoncé joue un rôle majeur. Une personne malade sait qu'elle est porteuse du gène, une personne saine ne sait pas si elle est porteuse. Dans la question 2), chaque information est importante pour discriminer les cas envisageables.

Eléments de solution :



1) En notant M le gène malade et S le gène sain, on construit l'arbre ci-contre décrivant la transmission des deux parents. Chacune des quatre issues est équiprobable.

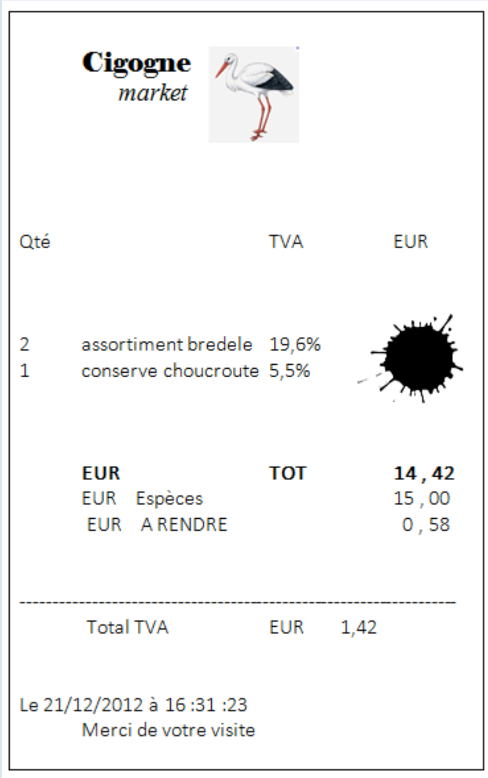
Cas 1 et 3 : p = $\frac{1}{4}$. Cas 2 : p = $\frac{1}{2}$.

2) Si l'homme et la femme ont chacun un frère malade, c'est que leurs deux parents respectifs étaient porteurs sains. Comme l'homme et la femme sont sains, la probabilité qu'ils soient porteurs est donc pour chacun de $\frac{2}{3}$ (deux issues possibles sur trois de l'arbre précédent). Pour qu'ils aient ensemble un enfant malade, il faut qu'ils soient tous les deux porteurs sains, avec la probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ que cela arrive. Sachant que les parents sont porteurs sains, il y a une chance sur quatre que leur enfant soit malade, donc la probabilité que l'enfant soit malade est égale à $\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$.

RETROUVER LES PRIX !

Mon stylo à encre a taché ce ticket de caisse.

Sauriez-vous retrouver le prix de l'assortiment de bredele et de la conserve de choucroute ?



Cigogne
market

Qté		TVA	EUR
2	assortiment bredele	19,6%	
1	conserve choucroute	5,5%	
	EUR	**TOT**	**14 , 42**
	EUR Espèces		15 , 00
	EUR A RENDRE		0 , 58
	Total TVA	EUR	1,42

Le 21/12/2012 à 16 :31 :23
Merci de votre visite

Niveau minimum :

Classe de 1^{e} ES

Thèmes :

Pourcentages ; TVA
Systèmes (d'équations)
Résolution de problème.

Méthodes - compétences :

Lecture attentive
Recherche d'information
Traduction de données
Modélisation
Essai-tâtonnement avec algorithme

Commentaires :

Une recherche par essais est tout à fait possible, et peut être efficace à l'aide d'un tableur après avoir cerné les ordres de grandeur des prix.
La définition de la TVA rend plus simple la recherche des prix HT.

Éléments de solution :

Prix TTC de l'assortiment de bredele : 2 € 99
Prix TTC de la conserve de choucroute : 8 € 44

TRIANGLES… DE PASCAL

Construire le triangle de Pascal jusqu'à la 26^e ligne.

Par la méthode de votre choix, faire apparaître les multiples de 3 parmi les nombres du triangle.

Commenter leur répartition.

Par exemple avec un tableur :

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1
etc…				

0				
0	0			
0	0	0		
0	1	1	0	
0	0	1	0	0
etc…				

Niveau minimum :

Classe de 1^e

Thèmes :

Coefficients binomiaux
Multiples
Algorithme

Méthodes - compétences :

Mise en œuvre d'une représentation
Mise en œuvre d'un algorithme
Soin, précision
Recherche d'information
Utiliser des formules

Commentaires :

L'utilisation du tableur ne donne pas le meilleur rendu visuel mais permet de réfléchir aux propriétés de construction et de les traduire correctement sur le tableur.
Tout autre procédé est bienvenu ; l'idée est « d'admirer le résultat obtenu »…
On peut ainsi parler de configuration fractale en justifiant que deux multiples de 3 situés « côte à côte » donnent bien un multiple de 3 « en dessous » par propriété des coefficients binomiaux.

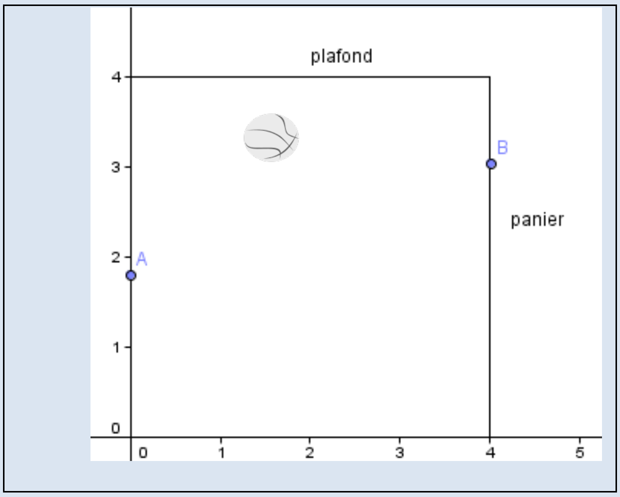
Éléments de solution :

BASKET

Amin, 1,80 m, tire la balle au niveau de sa tête en direction du panier de basket situé à 4 m de lui et à la hauteur réglementaire de 3,05 m. Amin a anticipé la trajectoire parabolique de sa balle pour qu'elle ne rencontre pas le plafond du gymnase haut de 4m et atterrisse dans le panier.

Quelles sont les trajectoires possibles de la balle d'Amin parmi les courbes représentant les fonctions f définies par les expressions suivantes ?

a) $f(x) = -0,3x^2 + 1,5x + 1,85$
b) $f(x) = -0,3x^2 + 1,505x + 1,8$
c) $f(x) = -0,3x^2 + 1,5125x + 1,8$
d) $f(x) = -0,5x^2 + 2,31x + 1,8$
e) $f(x) = -0,37x^2 + 1,7925x + 1,8$



Niveau minimum :

Classe de 2^{de}

Thèmes :

Fonctions du 2^{d} degré
Courbe représentative d'une fonction

Méthodes - compétences :

Conjecturer les bonnes solutions
Faire des essais
Négation d'une propriété (contre-exemple)
Valider une conjecture par la vérification de propriétés suffisantes

Commentaires :

En 1^{e}, on peut donner le même énoncé sans proposer de liste de solutions possibles et demander d'en trouver une.

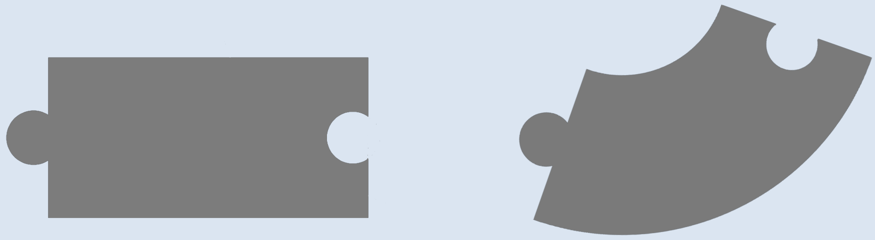
En 2^{de}, on peut prolonger l'activité par la même avec un lob au tennis mais en laissant cette fois le problème ouvert (c'est-à-dire aussi sans liste de solutions possibles).

Eléments de solution :

a) Ne passe pas par A
b) Ne passe pas par B
c) Convient (ordonnée du sommet : environ 3,7)
d) Admet des points au–dessus de la droite d'équation $y = 4$
e) Convient (ordonnée du sommet : environ 3,97)

CONSTRUIRE UN CIRCUIT

Dans une boite de jeux se trouvent les pièces d'un circuit : 4 lignes droites et 8 virages à droite.



1. On prend au hasard une pièce dans la boite. Quelle est la probabilité que cette pièce soit un virage ?
2. On prend au hasard une pièce dans la boite, puis une deuxième pièce. Quelle est la probabilité que ces deux pièces soient des virages ?
3. On prend au hasard successivement 4 pièces dans la boite. Quelle est la probabilité que ces 4 pièces soient des virages ?
4. Quelle est la probabilité qu'on puisse construire un circuit fermé à l'aide de 8 pièces prises au hasard dans la boite ?

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Probabilités
Loi binomiale (pour le prolongement en classe de première)

Méthodes - compétences :

Calcul d'une probabilité dans le cas d'équiprobabilité
Modélisation d'une situation aléatoire à deux épreuves
Modélisation d'une situation aléatoire à 4 épreuves

Commentaires :

Prolongement en classe de première suivante :
On dispose de pièces d'un circuit : des lignes droites et des virages à droite, cette fois-ci en très grand nombre. L'effectif des virages est deux fois plus élevé que celui des virages.
Quelle est la probabilité qu'on puisse réaliser un circuit fermé à l'aide de 8 pièces prises au hasard ?

Éléments de solution :

1. 2/3

2. 14/33

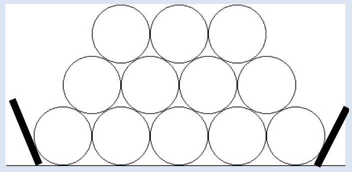
3. 14/99

4. Pour réaliser le circuit il faut 4 virages et un nombre pair de lignes droites.
Il faut et suffit donc qu'il y ait 4 virages parmi les 8 pièces prises.
Prendre 8 pièces parmi 12 revient à éliminer 4 pièces parmi 12, qui doivent impérativement être des virages.
La réponse à la question 4 est donc la même qu'à la question 3.

Prolongement :
Le nombre de virages prélevés X suit la loi binomiale de paramètres 8 et 2/3.
Comme il n'y a pas de virages à gauche, pour réaliser le circuit il faut exactement 4 virages.
La solution est P(X=4) = 1120/6561.

DEBARDAGE

Pour empiler des grumes identiques (troncs d'arbres coupés par le bucheron), le débardeur forme une pyramide. Il ne peut commencer à empiler que lorsque la première rangée au sol est calée par des renforts enfoncés dans le sol. Une fois la pile entamée, il ne peut plus enlever les renforts au risque que la pile s'écroule.



1) Une coupe de 48 grumes doit être stockée.
   a) Combien le débardeur doit-il en déposer sur la première rangée pour occuper le moins de place possible ?
   b) Combien de rangées aura-t-il empilé ?

2) Proposer un algorithme permettant au débardeur de calculer le nombre minimal de grumes à déposer sur la première rangée en fonction du nombre total de grumes à stocker.

Niveau minimum :

Classe de 2^{de}

Thèmes :

Suites
Dénombrement
Algorithmique, boucle conditionnelle

Méthodes - compétences :

Essais erreur, tâtonnement
Construire un algorithme

Commentaires :

Même si la chronologie de l'empilement incite à commencer par la rangée du bas, un raisonnement habile consiste à compter à partir de la rangée du haut (avec une seule grume), en considérant une pile complète.
En effet l'algorithme qui en découle est beaucoup plus simple car il ne nécessite qu'une boucle conditionnelle et donc beaucoup moins de calculs.

Eléments de solution :

1) 10 rangées sont nécessaires
2)
Entrer G le nombre de grumes
N prend la valeur 1 (nombre de grumes sur la rangée en cours)
S prend la valeur 1 (nombre total de grumes pour N rangées)
Tant que $S \leq G$
        N prend la valeur N+1
        S prend la valeur S+N
Fin du tant que
Afficher N

ÉCHELLE QUI GLISSE

Une échelle glisse le long d'un mur.

1. Tracer une figure dans le cas particulier où une échelle de longueur 1 forme un angle de 45° avec le sol. Calculer dans ce cas le rayon du cercle tangent à l'échelle, au mur et au sol.

2. Une échelle qui glisse le long d'un mur enveloppe-t-elle un cercle ?

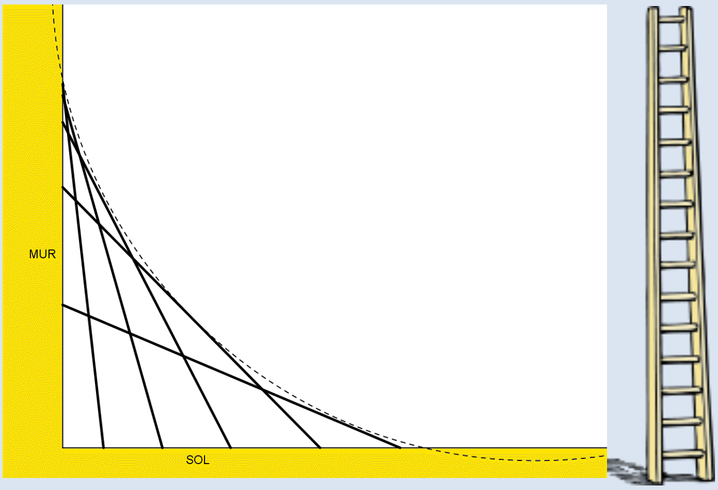


Schéma qui représente 5 positions de l'échelle qui glisse.
En pointillés, un cercle qui pourrait ressembler au cercle recherché dans l'exercice.

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Calcul de longueurs dans des demi-carrés
Raisonnement par l'absurde

Méthodes - compétences :

Prise d'initiative
Calcul de longueur sans que la figure ne soit donnée
Recherche d'un contre-exemple

Commentaires :

Les prises d'initiatives attendues :

- Repérer les triangles de la figure qui permettent le calcul de la longueur.
- Passage de la longueur 1 à une longueur L quelconque pour l'échelle.
- En question 2, si le cercle existe, il vérifie les conditions de la question 1.
- Montrer par l'absurde qu'il existe une position de l'échelle où elle n'est pas tangente au cercle trouvé auparavant.

Éléments de solution :

1. On note *R* son rayon et *L* la longueur de l'échelle. Dans le cas général $L = 2R\left(\sqrt{2} - 1\right)$
2. Si l'échelle, dans toutes ses positions, est tangente au cercle trouvé, le point de contact appartient au cercle. On peut donc construire, à partir d'un point du cercle le segment représentant l'échelle. Un logiciel de géométrie dynamique permet de conclure.
   Un raisonnement lorsque l'angle formé par l'échelle et le sol est proche de 0° permet également de conclure.

Académie de Strasbourg

LE MOINS FATIGANT !

A, *B*, *C* et *D* sont quatre points du plan (On suppose que ni *C* ni *D* ne sont alignés avec *A* et *B*).
On donne les propriétés suivantes :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
3) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
4) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
5) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
6) (AB) est perpendiculaire à (BC)
7) (BC) est perpendiculaire à (CD)
8) (AC) est perpendiculaire à (BD)
9) (AD) est perpendiculaire à (AB)
10) AD = BC
11) AB = BC
12) AC = BD
13) AB = CD
14) BC = CD
15) CD = DA

Le professeur explique que montrer l'une de ces propriétés coûte 1 unité d'effort.
Pour faire une démonstration, on montre plusieurs de ces propriétés et on en déduit un total d'unités d'effort.

Donner votre total d'unités d'efforts (ainsi que la liste ordonnée des propriétés à vérifier) pour démontrer que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme ? un trapèze ? un rectangle ? un losange ?

Comparer vos performances avec vos camarades.

Le professeur affirme que l'on peut démontrer que *ABCD* est un carré avec un total de 3 unités d'effort, qu'en pensez-vous ?

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Logique
Démonstration
Quadrilatères particuliers
Vecteurs

Méthodes - compétences :

Organiser son raisonnement
Pratiquer la déduction
Distinguer condition nécessaire et condition suffisante

Commentaires :

La notion de condition suffisante est sous-jacente. L'exercice permet de discuter avec les élèves de l'intérêt de faire une figure pour économiser des efforts (cas particulier du trapèze).
On pourra comparer des méthodes sur leur performance et comparer des méthodes de même performance.
Une poursuite du travail est possible avec une activité où il faut montrer qu'un quadrilatère donné n'est pas un trapèze.

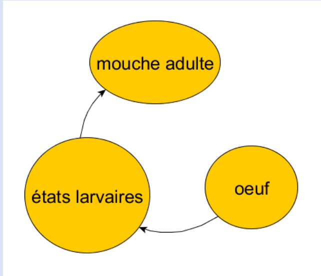
Eléments de solution :

Parallélogramme : 1 unité d'effort.
Trapèze : 1 unité d'effort si on conjecture au préalable la nature des bases grâce à une figure.
Losange + Rectangle : 2 unités d'effort.
Carré : 3 unités d'effort.

DES MOUCHES, DES MORTS ET… DES MATHS

Les mouches du type *Calliphora Vicina* pondent leurs œufs sur les cadavres dans les heures qui suivent la mort.
Ces œufs donneront à nouveau des mouches adultes en un cycle dont la durée dépend de la température.
À température fixée, la proportion du cycle accomplie par jour est considérée comme constante.

La présence de jeunes mouches adultes sur un cadavre en putréfaction permet donc au médecin légiste d'estimer la date de la mort s'il connaît la température des jours précédents.



Cycles de Calliphora Vicina

Température	Nombre de jours d'un cycle	proportion du cycle accomplie par jour (en % arrondi à 0,1)
16	36	2,8
18	31	
19		
20	28	3,6
21		
22		
24		

1) À l'aide des données du tableau ci-contre :
a) Dater la mort d'un cadavre trouvé le 31 mai 2012 en estimant que la température ambiante a été de 20° les 10 derniers jours et de 16° les jours précédents.
b) On fait l'hypothèse que la proportion du cycle accomplie par jour est une fonction affine de la température : compléter alors le tableau.

2) Un médecin légiste relève le 31 Mai 2012 des jeunes mouches adultes *Calliphora Vicina* sur un cadavre dans une forêt. La station météorologique locale lui fournit les données suivantes :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temp	16	18	16	16	18	20	19	20	20	21	18	19	20	18	20

Jour	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Temp	20	19	20	18	19	20	21	24	24	22	22	20	19	20	21

Estimer la date de la mort.

Niveau minimum :

Classe de 2^{nde}

Thèmes :

Fonctions affines
Pourcentages

Méthodes - compétences :

Mise en œuvre d'un algorithme
Essais, calculs itérés
Utiliser un tableau
Reconnaître les situations relevant de la proportionnalité, traiter les situations relevant de la proportionnalité en choisissant un moyen adapté.

Commentaires :

Une difficulté est de bien cerner les situations de proportionnalité de l'exercice, notamment dans le cadre de la modélisation par une fonction affine.

Pour la question 2 : on peut encourager les élèves à mettre en œuvre un algorithme à l'aide du tableur pour ces calculs itérés et à déterminer l'expression de la fonction affine pour automatiser les calculs.

La méthode suggérée ici est effectivement employée en entomologie médico-légale.

Cet activité peut constituer une activité pour MPS en 2^{nde}.

Éléments de solution :

1) a) Le décès remonte au 28 avril.
b) 2^{e} colonne : 36 ;31 ;29 ;28 ;26 ;25 ;23
3^{e} colonne : 2,8 ;3,2 ;3,4 ;3,6 ;3,8 ;4 ;4,4
2) Le décès remonte au 2 mai.

DESCENTE PUIS MONTÉE

Le changement de vitesses du vélo de Léa fonctionne de la manière suivante :

- Une chaîne relie le plateau avant au pignon arrière.
- Le pédalier avant est formé de 3 plateaux qui comportent 22, 32 et 44 dents.
- La cassette arrière est formée de 7 pignons qui comportent 11, 13, 15, 18, 21, 24 et 28 dents.
- La roue arrière a un diamètre de 72 cm.

1. Dans une descente, Léa choisit le grand plateau et le petit pignon. Montrer que si elle fait 1 tour de pédale par seconde, elle roule environ à 32,5 km/h.

2. Après la descente, la route remonte, avec une pente de plus en plus forte.
Dans quel ordre peut-on conseiller à Léa de changer les vitesses ?



Niveau minimum :

Classe de 2[de]

Thèmes :

Calculs
Proportionnalité, vitesse
Circonférence

Méthodes - compétences :

Raisonnements logiques

Commentaires :

Le professeur sera certainement amené à expliciter le rôle du rapport entre le nombre de dents d'un plateau par le nombre de dents d'un pignon.
On pourra étudier les cas 44/11 et 22/11, puis l'admettre dans les autres cas.

Éléments de solution :

1) Lors de la descente, le choix 44/11 implique que pour un tour de pédale, la roue arrière aura fait 4 tours.
Distance parcourue en 1 heure, exprimée en km :

$$4 \times 0{,}00072\pi \times 3600 = \frac{1296}{125}\pi \approx 32{,}572$$

2) À l'aide d'un tableur calculer les rapports (nombre de dents d'un plateau par le nombre de dents d'un pignon) pour les 21 choix possibles et conseiller de changer les vitesses de telle manière à ce que ces rapports choisis soit décroissants.

	11	**13**	**15**	**18**	**21**	**24**	**28**
22	2,00	1,69	1,47	1,22	1,05	0,92	0,79
32	2,91	2,46	2,13	1,78	1,52	1,33	1,14
44	4,00	3,38	2,93	2,44	2,10	1,83	1,57

Il n'y a pas unicité de la stratégie car certains rapports sont très proches.

Dans la réalité tous les rapports possibles ne seront pas sélectionnés car on ne change pas en même temps la vitesse avant et la vitesse arrière.

RANGER DES BALLES

Au tournoi de Roland Garros, 60 000 balles de tennis sont utilisées.

1. Peut-on ranger 200 balles de tennis dans une boîte parallélépipédique de dimensions 50 cm, 37 cm et 30 cm ?

2. Peut-on ranger les balles utilisées à un tournoi de Roland Garros dans un camion ?

<u>Indication :</u> On pourra au préalable répondre aux questions suivantes :

a) Peut-on mettre 5 balles de tennis dans une boîte parallélépipédique de dimensions 14 cm, 14 cm et 12 cm ?

b) Peut-on mettre 2 balles de tennis dans une boîte cubique d'arête 10,5 cm ?

Niveau minimum :

Classe de 2^{de}

Thèmes :

Géométrie dans l'espace

Méthodes - compétences :

Faire des dessins dans l'espace
Extraire des plans pour pouvoir calculer des longueurs

Commentaires :

Le rayon d'une balle de tennis est environ 3,3 cm, indication qui devra être donnée si les élèves n'ont pas accès à une documentation.
Pour ne pas s'exposer à un vrai problème sur la structure du rangement, il faut impérativement supposer que la première couche de balles soit tangente deux cotés côtés consécutifs de la boîte, sinon la hauteur peut être moins haute qu'attendue.

Éléments de solution :

1. Oui

2. Oui car cela représente 300 boîte de 0,0555 m^3, c'est-à-dire environ 17 m^3.

<u>Indication :</u>

a) Oui b) Oui

<u>Explications :</u>

- 4 sphères de rayon R tiennent dans un parallélépipède rectangle de taille 4Rx4Rx4R.
- Posons une sphère de rayon R sur 4 sphères de rayon R rangées dans la boîte 4R×4R×4R. La hauteur de l'empilement obtenu est : $2R + R\sqrt{2}$.
- En empilant de la sorte c couches (c>1) de axb sphères de rayon R, les abc sphères peuvent être rangées dans un parallélépipède rectangle de taille $(2aR+R)x(2bR+R)x(2R+(c-1)R\sqrt{2})$
- Pour le rangement dans la boîte, un premier calcul donne 7x5x4 = 140
- Un deuxième calcul avec l'empilement proposé 7x5x6 = 210

RESULTAT POSITIF

Voici un jeu :

1) On choisit un nombre réel x et on progresse selon le schéma ci-dessous :

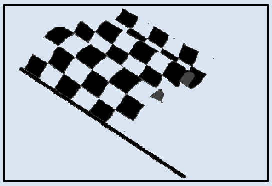
départ $x \xrightarrow{\text{élever au carré}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\text{soustraire } 4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ***arrivée***

On ne gagne que lorsqu'on arrive avec un résultat strictement positif. Quels sont tous les nombres qui permettent de gagner ?

2) Même question pour les schémas suivants :

départ $x \xrightarrow{\text{ajouter } 2} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\text{élever au carré}} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\text{soustraire } 36} \ldots\ldots\ldots$ ***arrivée***

départ $x \xrightarrow{\text{ajouter } 1} \ldots\ldots \xrightarrow{\text{élever au carré}} \ldots\ldots \xrightarrow{\text{multiplier par } -4} \ldots\ldots \xrightarrow{\text{ajouter } 9} \ldots\ldots$ ***arrivée***



Niveau minimum :

Classe de 2^{de}

Thèmes :

Inéquations
Tableaux de signes
Fonction carré
Décomposition d'une expression algébrique
Factoriser
Priorités des opérations
Enchaînement de fonctions

Méthodes - compétences :

Faire des essais pour démarrer
Savoir passer d'un mode d'expression à un autre (expression en fonction de x à l'arrivée)
Savoir résoudre une inéquation graphiquement
Savoir résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signes

Commentaires :

Faire des essais permet de mieux appréhender l'enchaînement des fonctions et de pouvoir écrire l'expression algébrique finale.
Une solution par lecture graphique peut être considérée comme satisfaisante selon le chapitre en cours ou si on ne souhaite pas rentrer dans un travail plus technique avec certains élèves.

Eléments de solution :

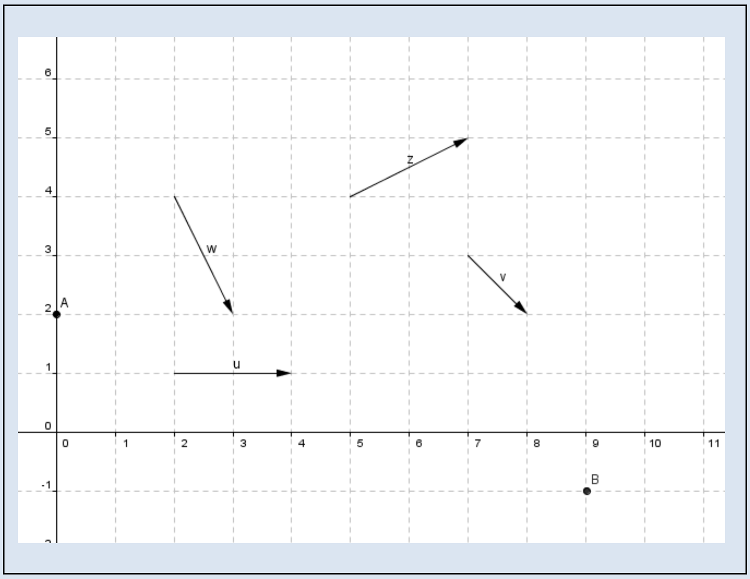
Premier schéma : $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Deuxième schéma : $x \in]-\infty;-8[\cup]4;+\infty[$

Troisième schéma : $x \in]-2,5;0,5[$

LE ROBOT (2)

Un robot part du point A pour arriver au point B du repère orthonormé ci-dessous.
Ce robot ne peut progresser qu'en avançant ou en reculant à chaque unité de temps d'un trajet représenté par l'un des vecteurs ci-dessous. De plus durant son voyage il ne peut utiliser plus de deux types de trajets différents.
Donner tous les trajets possibles pour arriver en B ? Donner le trajet le plus court



Niveau minimum :

Classe de 2^{de}

Thèmes :

Vecteurs
Coordonnées, repérage dans le plan
Distance dans un repère orthonormé
Systèmes d'équations

Méthodes - compétences :

Divers essais pour démarrer
Traduire le problème par un système
Distance minimale déterminée par l'examen de toutes les solutions (en nombre fini)

Commentaires :

On peut proposer l'activité au Collège sans utiliser le terme « vecteurs » et en limitant les trajets possibles.
Les systèmes permettent de déterminer toutes les solutions (ou de mettre en évidence qu'il n'y en a pas). Mais trouver leurs solutions entières ne requiert pas de technicité particulière. On peut donc faire l'exercice avant de réaborder les systèmes d'équations en 2^{de}.

Eléments de solution :

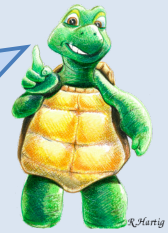
3 solutions : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u} + 3\vec{v} = 15\vec{v} - 6\vec{w} = 5\vec{v} + 2\vec{z}$.
Le trajet le plus court correspond à la première solution.

DECOUVRIR GÉOTORTUE

1) a) Dans la fenêtre de procédures de GéoTortue, recopier la procédure suivante :

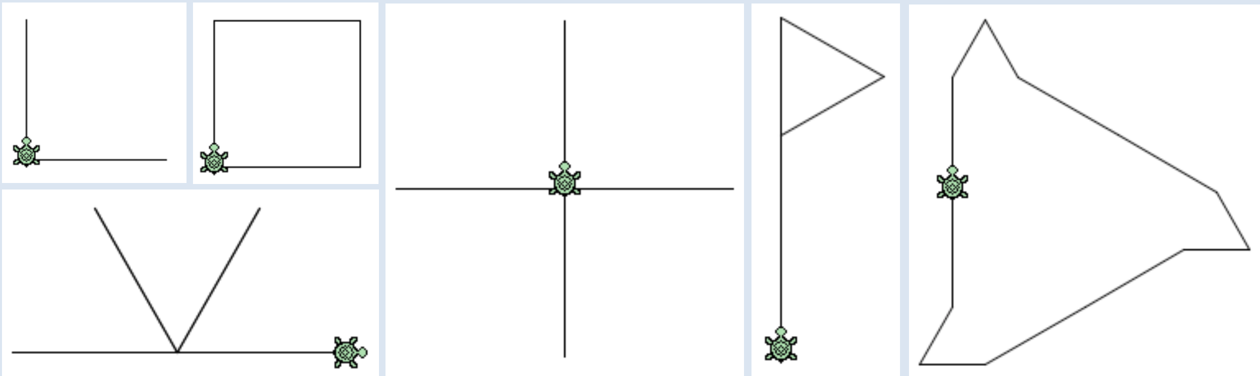
```
pour premierdessin
vg
td 90
av 100
tg 135
av 140
td 135
av 100
```

pour permet de définir le nom de la procédure
vg pour effectuer un vide graphique (réinitialisation)
td pour tourner à droite en degré
av pour avancer en unité graphique
tg pour tourner à gauche en degré



b) Dans la fenêtre de commande, saisir `>premierdessin` pour exécuter la procédure. Observer la tortue.

2) Rédiger et exécuter de nouvelles procédures pour réaliser les dessins suivants.



D'autres commandes sont disponibles dans l'aide du site http://geotortue.free.fr/ comme la commande **re** qui permet de reculer.

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Angles
Constructions

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet de découvrir l'architecture du logiciel ainsi que la syntaxe des commandes les plus simples.
Pour la première séquence avec le logiciel, il est vivement conseillé de le présenter au préalable à la classe sur un exemple vidéo projeté.
La prise en main se fait ensuite très aisément car la possibilité de visualiser la procédure durant sa réalisation facilite l'autocorrection.
Prévoir une heure pour cette séquence qui permet de comprendre l'orientation des déplacements de la tortue dépendant de sa position.
D'autres activités sont proposées sur le site de l'IREM de Paris-Nord : http://www-irem.univ-paris13.fr/
Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Éléments de solution :

Procédures possibles pour les 3 premiers dessins :

```
pour figure1
vg
av 100
re 100
td 90
av 100
re 100
tg 90
```

```
pour figure2
vg
av 100
td 90
av 100
td 90
av 100
td 90
av 100
td 90
```

```
pour figure3
vg
tg 90
av 100
re 100
td 60
av 100
re 100
td 60
av 100
re 100
td 60
av 100
```

BOUCLES AVEC GÉOTORTUE

rep permet de répéter un bloc de commandes.
Pour dessiner un carré par exemple :

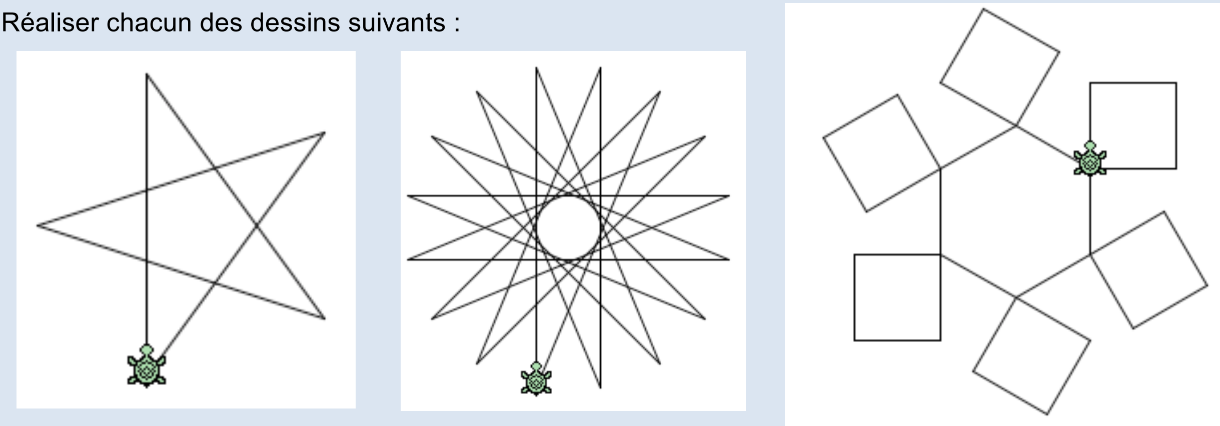
```
rep 4 [ av 50 ; td 90 ]
```

ou

```
rep 4 [
av 50
td 90
]
```

1) Avec GéoTortue, dessiner un triangle équilatéral puis un hexagone régulier en utilisant la commande **rep**.

2) Réaliser chacun des dessins suivants :



Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Angles
Polygones
Constructions

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet d'apprendre à utiliser des boucles dans les procédures GéoTortue.
Il est conseillé de proposer en prérequis l'activité "Découvrir GéoTortue".
D'autres activités sont proposées sur le site de l'IREM de Paris-Nord : http://www-irem.univ-paris13.fr/
Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Éléments de solution :

Procédures possibles pour les 3 dessins de la question 2 :

```
pour étoile5branches
vg
rep 5 [
av 150
td 144
]
```

```
pour étoile16branches
vg
rep 16 [
av 200
td 157.5
]
```

```
pour figure
vg
rep 6 [
rep 4  [ av 50 ; td 90 ]
tg 60
av 50
]
```

Académie de Strasbourg

AFFECTATIONS AVEC GÉOTORTUE

1) a) Dans la fenêtre de procédures de GéoTortue, recopier la procédure suivante :

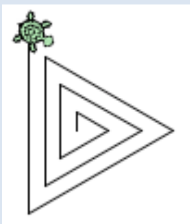
```
pour spirale
vg
x:=10
rep 20 [
av x
td 90
x:=x+10
]
```

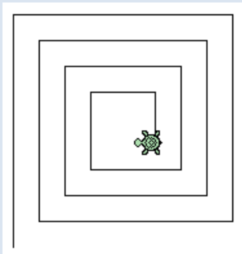
x:=5 permet d'affecter la valeur 5 à la variable x

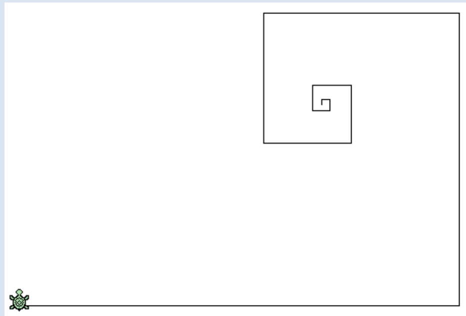
x:=x+10 permet d'augmenter de 10 la valeur de la variable x

b) Exécuter la procédure et observer la tortue.

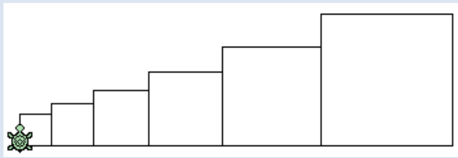
2) Modifier la procédure précédente pour obtenir les spirales ci-contre :







3) Écrire une procédure permettant de dessiner la série de carrés ci-contre.



D'autres commandes sont disponibles dans l'aide du site http://geotortue.free.fr/

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Angles
Polygones
Constructions
Variable
Suite

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet d'apprendre à utiliser les affectations dans les procédures GéoTortue.
Il est conseillé de proposer en prérequis les activités "Découvrir GéoTortue" et "Boucles avec GéoTortue".
D'autres activités sont proposées sur le site de l'IREM de Paris-Nord : http://www-irem.univ-paris13.fr/
Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Éléments de solution :

Procédures possibles pour les 3 dessins de la question 2 :

```
pour spirale1
vg
x:=10
rep 10 [
av x
td 120
x:=x+10
]
```

```
pour spirale2
vg
x:=180
rep 15 [
av x
td 90
x:=x-10
]
```

```
pour spirale3
vg
x:=5
rep 12 [
av x
td 90
x:=1.5*x
]
```

COURSES DE GÉOTORTUES

1) a) Dans les préférences, ajouter deux tortues appelées Berthe et Sophie.
b) Dans la fenêtre de procédures de GéoTortue, recopier la procédure suivante :

```
pour courses
vg
à Berthe
tlp 50 0
à Sophie
tlp -50 0
```

à Berthe permet de sélectionner une tortue et de lui donner des ordres.
tlp 50 0 téléporte la tortue au point donné par son abscisse (ici 50) et son ordonnée (ici 0).

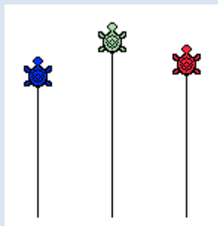
2) a) Dans ce premier jeu, seules Achille (la tortue verte par défaut) et Berthe jouent.
On lance un dé. Si le résultat est 1, 2 ou 3 alors Achille avance de 1 sinon Berthe avance de 1.
Programmer une procédure permettant de simuler une course où l'on lance 200 dés.

Aide : **alea(n)** renvoie un nombre entier au hasard compris entre 1 et n.
si (x>0) alors [tg 90 ; av 10] sinon [re 10] est un exemple d'instruction conditionnelle.

b) Exécuter la procédure plusieurs fois et faites vos paris !

3) a) Dans ce nouveau jeu, les trois tortues participent.
On lance un dé. Si le résultat est 1 ou 2, Achille avance de 1. Si le résultat est 3, Berthe avance de 1. Dans les autres cas, Sophie avance de 1.
Programmer une procédure permettant de simuler une course où l'on lance 200 dés.

b) Exécuter la procédure plusieurs fois et faites vos paris !
Les résultats étaient-ils prévisibles ? Expliquer.



4) Dans la dernière procédure, ne modifier que la valeur des commandes **av** pour que les trois tortues aient la même probabilité de gagner.

D'autres commandes sont disponibles dans l'aide du site http://geotortue.free.fr/

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Probabilité
Variable
Proportionnalité

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet d'apprendre à utiliser les instructions conditionnelles. Il est conseillé de proposer en prérequis les activités "Découvrir GéoTortue", "Boucles avec GéoTortue" et "Affectations avec GéoTortue".
D'autres activités sont proposées sur le site de l'IREM de Paris-Nord : http://www-irem.univ-paris13.fr/
Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Éléments de solution :

2) a) Procédure possible :

```
rep 200 [
x:=alea(6)
si (x<4) alors [ à Achille ; av 1 ] sinon [ à Berthe ; av 1 ]
]
```

3) a) Procédure possible :

```
rep 200 [
x:=alea(6)
si (x<3) alors [ à Achille ; av 1 ] sinon [
si (x==3) alors [ à Berthe ; av 1 ] sinon [ à Sophie ; av 1 ] ]
]
```

4) Procédure possible :

```
rep 200 [
x:=alea(6)
si (x<3) alors [ à Achille ; av 1.5 ] sinon [
si (x==3) alors [ à Berthe ; av 3 ] sinon [ à Sophie ; av 1 ] ]
]
```

COURSES DE GÉOTORTUES (2)

1) a) Dans les préférences, ajouter une tortue appelée Charlotte.
b) Dans la fenêtre de procédures de GéoTortue, recopier la procédure suivante :

```
pour course
vg
à Charlotte
tlp 50 0
```

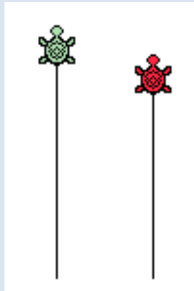
à Charlotte permet de sélectionner une tortue et de lui donner des ordres.
tlp 50 0 téléporte la tortue au point donné par son abscisse (ici 50) et son ordonnée (ici 0).

2) a) On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \sqrt{3x}$.

Lorsque Achille avance d'une longueur égale à $f(1)$ alors Charlotte avance d'une longueur égale à $g(1)$.
La course se poursuit : Achille avance de $f(1{,}1)$ et Charlotte de $g(1{,}1)$ puis Achille de $f(1{,}2)$ et Charlotte de $g(1{,}2)$ et ainsi de suite en augmentant de 0,1 à chaque étape jusqu'à $f(20)$ pour Achille et $g(20)$ pour Charlotte.
Programmer une procédure permettant de simuler une course.

Aide : **def g:*x*->sqrt(3**x*)** permet de définir la fonction g.
f(*x*) donne l'image de la valeur de *x* par la fonction f.

b) Exécuter la procédure. Qui gagne la course ?



3) Modifier la procédure de façon à poursuivre la course jusqu'à $f(30)$ pour Achille et $g(30)$ pour Charlotte. Qui gagne la course ? Expliquer.

D'autres commandes sont disponibles dans l'aide du site http://geotortue.free.fr/

Niveau minimum :

Classe de 2de

Thèmes :

Fonctions
Suites
Variable

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet d'apprendre à utiliser les fonctions dans les procédures GéoTortue.
Il est conseillé de proposer en prérequis les activités "Découvrir GéoTortue", "Boucles avec GéoTortue" et "Affectations avec GéoTortue".
D'autres activités sont proposées sur le site de l'IREM de Paris-Nord : http://www-irem.univ-paris13.fr/
Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Eléments de solution :

```
pour course
vg
à Charlotte
tlp 50 0
def f:x->x^2/2
def g:x->sqrt(3*x)
x:=1
rep 30 [
à Achille
av f(x)
à Charlotte
av g(x)
x:=x+0.1
]
```

L'ASPIRATEUR ROBOT

Un aspirateur robot circulaire de diamètre 40 cm doit être programmé pour nettoyer une pièce rectangulaire vide de dimensions 3,20 m x 4 m.
On suppose que le robot n'avance que parallèlement aux murs

1. L'aspirateur robot se trouve dans un coin de la pièce.
   Que fait le programme suivant : Répéter 4 fois « Ax-D90 »
   On discutera selon l'orientation de l'aspirateur robot au départ.

2. Proposer un programme de nettoyage qui permet à l'aspirateur robot de passer dans toute la pièce en balayant plus de 99,7 % de la surface du sol.

3. Calculer la distance qu'il aura parcourue en suivant une seule fois le programme proposé à la question précédente.

Notations :

- A40 : avancer de 40cm
- Ax : avancer tant que possible
- D90 : tourner à droite de 90°
- G90 : tourner à gauche de 90°

Niveau minimum :

Classe de 3e

Thèmes :

Algorithmique
Longueurs

Méthodes - compétences :

Dessin à l'échelle ou à main levée
Calcul d'aires
Calcul de proportions

Commentaires :

Des explications sur le « langage » donné en fin d'énoncé seront peut-être nécessaires.
Bien des solutions de parcours existent mais pour beaucoup d'entre elles des arrondis ne sont pas balayés dans un premier temps ; c'est le cas d'un parcours en « spirale ».

Éléments de solution :

1. Trois possibilités selon son orientation initiale :
   - il ne peut pas avancer
   - il se déplace le long d'un bord puis est bloqué
   - il fait le tour de la pièce en longeant les bords

2. L'aire de la partie qui ne peut pas être atteinte (les arrondis des 4 coins) est environ 0,0343 m^2 ce qui correspond à 0,27% de l'aire de la pièce.
Pour le nettoyage total, définir le coin initial ainsi que l'orientation du robot. Un programme possible en supposant que le robot commence par longer un mur de longueur 3,20 m est :

Faire « Ax-D90-A40-D90-Ax-G90 »
Faire 4 fois « A40-G90-Ax-D90-A40-D90-Ax-G90 »
Puis « D90-D90-Ax-D90 »
Et répéter 2 fois « Ax-D90 »

3. Le parcours précédent mesure 41,6 m.

DIFFERENCE DE CARRÉS

Quels sont les nombres entiers naturels que l'on peut obtenir par différence de 2 carrés d'entiers?

Niveau minimum :

Classe de 3^e

Thèmes :

Calcul littéral
Parité
Identités remarquables

Méthodes - compétences :

Conjecture à partir d'essais sur des différences particulières (différence d'entiers successifs, d'entiers pairs, d'entiers impairs)
Validation de la conjecture à l'aide de la forme de ces différences particulières
Disjonction de cas.

Commentaires :

La conjecture est difficile et nécessite peut-être de guider un peu la nature des essais, d'autant plus que ce sont les essais dans des cas précis qui permettent d'envisager les raisonnements à mettre en forme pour la démonstration.
Les différentes étapes du raisonnement ne sont peut-être pas accessibles à tous les élèves mais on peut demander une démonstration partielle des résultats.

Eléments de solution :

$(n+1)^2 - n^2$ permet d'obtenir tous les entiers impairs.
$(n+1)^2 - (n-1)^2$ permet d'obtenir tous les multiples de 4.
Pour montrer que les pairs non multiples de 4 sont exclus :
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ donc la différence des carrés de deux entiers pairs ou de deux entiers impairs est un multiple de 4 mais pas de 2, et la différence de deux carrés de parité différente est impaire.

MENEZ L'ENQUÊTE !

x explique à *y*

- si je suis positif alors je suis dans l'intervalle [50 ;100]
- si je ne suis pas positif alors je ne suis pas le cube d'un entier.
- je suis inférieur à toi ou je suis dans l'intervalle [50 ;100]
- je suis le cube d'un entier

À partir de ces informations, peut-on conclure que :

a) *x* n'est pas positif ?
b) *x* est dans l'intervalle [20 ;100] ?
c) *x* n'est pas inférieur à *y* ?

Niveau minimum :

Classe de 3^{e}

Thèmes :

Ordonner
Comparaison
Intervalles
Logique
Inclusion

Méthodes - compétences :

Faire des essais des propriétés proposées pour des valeurs de *x*
Raisonner par l'absurde
Raisonner par contraposée
Pratiquer la déduction

Commentaires :

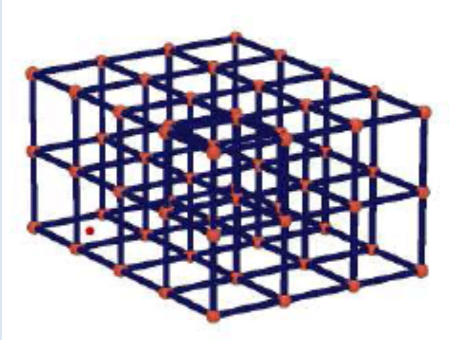
Activité qui s'accompagne d'une réflexion sur la notion d'implication, de contraposée, de l'usage de la conjonction « ou », et de l'inclusion d'ensembles.

Eléments de solution :

x est le cube d'un entier donc il est positif (contraposée de la 2^{e} information).
Il est donc dans l'intervalle [20 ;100] puisqu'il est dans l'intervalle plus petit [50,100] par la 1^{e} information.
On ne peut pas savoir si x est inférieur à *y* ou pas.

COMPTER AVANT D'ESCALADER

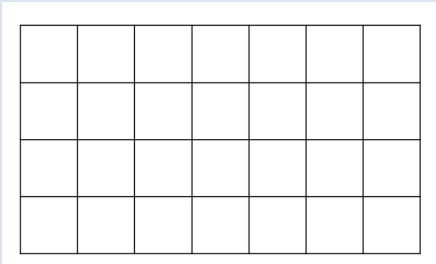
Sur une place de jeux se trouve la structure métallique suivante. Elle mesure 2 mètres de haut, 3 mètres de large et 4 mètres de long et est formée de cubes ouverts d'arrête un mètre.



1. Combien peut-on dénombrer de cubes ?

2. Si pour la même taille, la structure était composée de cubes d'arrêtes 50 centimètres, combien pourrait-on y dénombrer de cubes ?

Indication : *On pourra au préalable faire l'exercice suivant :*



a) Combien peut-on dénombrer de carrés de taille 1 dans ce dessin ?
b) Combien peut-on dénombrer de carrés de taille 2 dans ce dessin ?
c) Combien peut-on dénombrer de carrés dans ce dessin ?
d) Combien peut-on dénombrer de carrés dans un rectangle de taille a x b, avec a et b entiers naturels non nuls et a ≤ b.

Niveau minimum :

Classe de 3^e

Thèmes :

Géométrie dans l'espace
Algorithme de dénombrement

Méthodes - compétences :

Décomposer un problème en problèmes plus simples à résoudre

Commentaires :

Les problèmes plus simples :

- combien de cube d'arrête 1 ?
- combien de cube d'arrête 2 ?…
- quelle est la taille du plus grand cube qui convient ?

En cas de difficulté, on peut demander aux élèves de considérer un carré 3×3 et de constater qu'il y a 3×3 carrés de côté 1, 2×2 carrés de côté 2 et 1×1 carré de côté 3.

Éléments de solution :

1. 30 2. 360

Indication :

a) 28 b) 18 c) 60

d) ab+(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)+…+2(b-a+2)+1(b-a+1)

Cas généraux :

Dans un carré a×a il y a $\sum_{i=1}^{a} i^2$ carrés.

Dans un rectangle a×b, avec a ≤ b, il y a $\sum_{i=1}^{a} (b-a+i)(i)$ carrés.

Dans un cube a×a×a il y a $\sum_{i=1}^{a} i^3$ cubes.

Dans un parallélépipède rectangle a×b×c, avec a ≤ b ≤ c, il y a $\sum_{i=1}^{a} (c-a+i)(b-a+i)i$ cubes.

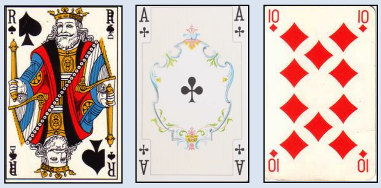
TIRAGES DE CARTES

On dispose d'un jeu de 32 cartes.
Dans tous les cas, lorsque le joueur tire une carte, il la regarde et la remet dans le jeu.

SI *la carte tirée est rouge*
ALORS SI *la carte est un roi*
ALORS *tu marques **2 points** et tu recommences le jeu au début*
SINON *le jeu est fini*

SINON *tire une deuxième carte et*
SI *la deuxième carte est rouge*
ALORS *le jeu est fini*
SINON *marque **1 point** et recommence le jeu au début*

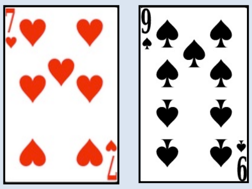
1) On tire successivement les cartes suivantes :



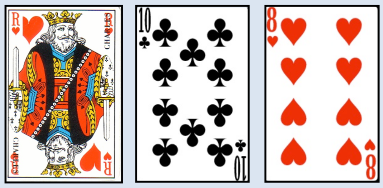
Combien de point(s) a-t-on marqué avec cette combinaison ?

2) Est-ce que les combinaisons suivantes sont possibles ? Si oui, combien de points sont obtenus ?

a)



b)



3) Donner une liste de cartes successives permettant de marquer 9 points.

Niveau minimum :

Classe de 3^e

Thèmes :

Algorithme
Probabilité
Dénombrement
Suite

Méthodes - compétences :

Application d'un algorithme
Raisonnement logique
Déduction

Commentaires :

Les questions posées peuvent être déclinées et complétées par d'autres combinaisons de cartes.
On pourra par exemple demander une combinaison permettant d'obtenir 5 points.
Au lycée, l'activité pourra être prolongée par des calculs de probabilité du type :
Quelle est la probabilité de marquer 1 point ? 2 points ? Aucun point ? …

Eléments de solution :

1) 1 point

2) a) Combinaison impossible.
b) Combinaison à 1 point.

2) Par exemple, successivement :
- 4 rois rouges,
- une carte noire,
- une carte noire.

VIENNOISERIES

Ingrédients pour 16 pains au chocolat :	Ingrédients pour 12 croissants :
- 500 g de farine - 250 g de beurre - 50 g de sucre - 20 g de levure de boulanger - 400 g de chocolat noir	- 250 g de farine - 125 g de beurre - 30 g de sucre - 20 g de levure de boulanger

Dans sa réserve Paulo dispose de 20 kg de farine et 2 kg de sucre. Les autres ingrédients sont en quantité nettement suffisante.
Paulo souhaiterait mettre en vente autant de pains au chocolat que de croissants.
Il a bien sûr la possibilité de produire un nombre de pains au chocolat qui n'est pas un multiple de 16 et un nombre de croissants qui n'est pas un multiple de 12.

1) Dispose-t-il de suffisamment de farine et de sucre pour produire 250 pains au chocolat et 250 croissants ?

2) Proposer un choix pertinent permettant à Paulo de produire un maximum de viennoiseries.

Niveau minimum :

Classe de 3^e

Thèmes :

Proportionnalité
Calculs algébriques
Géométrie analytique
Systèmes
Equations
Calcul littéral

Méthodes - compétences :

Essai erreur
Utilisation d'un graphique
Tâtonnement

Commentaires :

La solution optimum au problème ne doit pas être nécessairement un objectif à atteindre. En effet, la modélisation peut mener à un système d'équations qui n'est pas classique.
Il est donc à attendre une solution pertinente dûment justifiée qui pourra être établie par essais successifs.

Eléments de solution :

En mettant le problème en équations, on peut trouver la solution optimale.
Si on note x le nombre de pains au chocolat et y le nombre de croissants alors le problème se traduit par les inéquations suivantes :

$$\frac{50}{16}x+\frac{25}{12}y \leq 2000$$

$$\frac{50}{16}x+\frac{30}{12}y \leq 2000$$

Il faudra comprendre que la condition 2 est suffisante.
En considérant que $x = y$, la solution est 355 pains au chocolat et 355 croissants.

Académie de Strasbourg

LES NOMBRES BINAIRES

L'écriture décimale utilise 10 symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
Exemple : le nombre 324 en écriture décimale est égal à $3\times10^2+2\times10^1+4\times10^0$

Il est possible d'écrire les nombres avec deux symboles seulement : le "0" et le "1".

Dans ce cas :
0 s'écrit 0
1 s'écrit 1
2 s'écrit 10
3 s'écrit 11
4 s'écrit 100
5 s'écrit 101 etc…

Ces nombres s'appellent les nombres binaires. Pour passer d'une écriture à l'autre, on utilise les puissances de 2.
Ainsi par exemple : **1011** s'écrit $2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$ ou encore **11**00**1** s'écrit $2^4 + 2^3 + 2^0 = 25$

Ce système est par exemple utilisé dans la programmation des ordinateurs. En électronique, soit le circuit est fermé (0), soit il est ouvert (1). A condition d'avoir un nombre suffisant de circuits, on peut coder n'importe quel nombre. Le code ASCII des ordinateurs utilise ainsi les nombres binaires pour représenter les caractères, les chiffres, les signes de ponctuation...

1) Écrire 6 puis 7 en nombre binaire.

2) Quel est le plus petit nombre binaire utilisant cinq symboles ? À quel nombre décimal correspond-il ?

3) Quel nombre décimal correspond au nombre binaire 10110.

Niveau minimum :

Classe de 4^e

Thèmes :

Numération
Nombres entiers
Puissances
Calculs
Arithmétique
Puissances

Méthodes - compétences :

Déduction
Raisonnements logiques

Commentaires :

Ce problème donne l'occasion de travailler l'écriture des nombres et en particulier le rang des chiffres.
Il pourra être traité en prérequis de l'activité "La numération des Trioz".
Les questions proposées sont à titre d'exemple. Il est possible de prolonger le problème par d'autres exemples.
Dans les classes du lycée, on pourra demander de formuler un algorithme en langage naturel (ou utiliser la fonction MOD du tableur) pour l'écriture binaire.

Eléments de solution :

1) 110 et 111

2) 10000 correspond à 16

3) 22

4) 1 000 000, 1 000 001 et 111 111

CUBES PEINTS

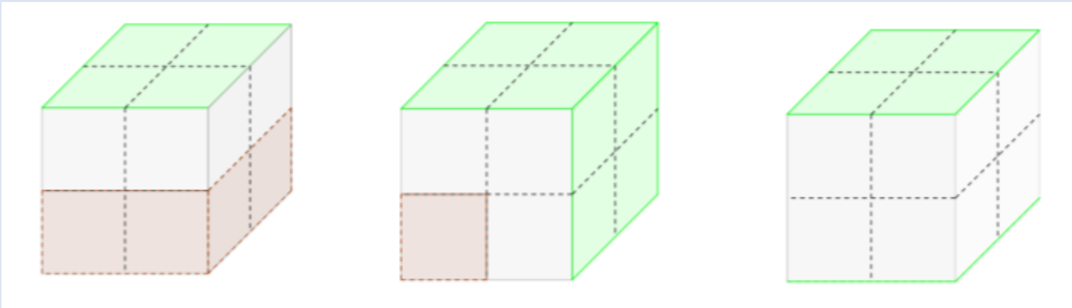
Un grand cube de côté n est formé d'un assemblage de $n \times n \times n$ petits cubes. Certaines faces du grand cube sont peintes entièrement.

Voici le cas d'un cube de côté 2 :

Si une face du grand cube est peinte (en vert), il reste 4 petits cubes non peints (en brun).

Si deux faces non parallèles du grand cube sont peintes, il reste 2 petits cubes non peints.

Si deux faces parallèles du grand cube sont peintes, il ne reste aucun petit cube non peints.



Trouver la taille d'un grand cube et le nombre de ses faces peintes de telle sorte que 48 petits cubes de son assemblage n'aient aucune face peinte.

Donner tous les cubes possibles avec leurs faces coloriées.

D'après Mathématiques Sans Frontières 2013

Niveau minimum :

Classe de 4^{e}

Thèmes :

Dénombrement

Méthodes - compétences :

Raisonnement par induction
Découpage mental
Dénombrement
Généralisation progressive

Commentaires :

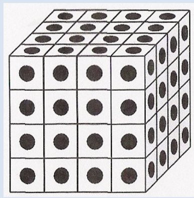
Exercice de dénombrement en prolongement de l'exercice « Cubes dénombrés ».

Éléments de solution :

Pour un cube de côté 4 et une face peinte, on obtient 48 cubes non peints.

CUBES DÉNOMBRÉS

Arnaud a construit un grand cube en emboîtant des petits cubes identiques.
Il décide de recouvrir de gommettes chacune des 6 faces du grand cube.
Comme sur le dessin, il colle une gommette par petit carré.
Voici une représentation dans le cas d'un grand cube de côté 4 petits cubes :



Son petit frère arrive et sépare tous les éléments du grand cube.
Arnaud ramasse patiemment les petits cubes et les observe attentivement.

Combien de petits cubes ne possèdent qu'une seule gommette ? Combien possèdent deux gommettes ? Trois gommettes ? Aucune gommette ?

Proposer une généralisation progressive :
1. Avec un cube de côté 2.
2. Puis de côté 3
3. Puis de côté 4
4. Puis de côté 5
5. Puis avec un cube de côté n.

Niveau minimum :

Classe de 4^e

Thèmes :

Dénombrement
Calcul littéral
Puissances
Identités remarquables
Conjecture

Méthodes - compétences :

Raisonnement par induction
Découpage mental
Dénombrement
Généralisation progressive

Commentaires :

Exercice de dénombrement demandant d'établir des conjectures allant progressivement vers une généralisation du problème avec un cube de côté *n*. On pourra se servir des identités remarquables pour vérifier les résultats trouvés.

Eléments de solution :

Cube de côté 4 :
8 cubes à 0 gommette
24 cubes à 1 gommette
24 cubes à 2 gommettes
8 cubes à 3 gommettes

Cube de côté n :
$(n-2)^3$ cubes à 0 gommette
$6(n-2)^2$ cubes à 1 gommette
$12(n-2)$ cubes à 2 gommettes
8 cubes à 3 gommettes

FEU TRICOLORE

Léo passe chaque matin sur la même route. Lorsqu'il se trouve en A, il se demande s'il passera au feu tricolore situé en B sans devoir s'arrêter.

Il observe que :

- Le cycle du feu est vert 20 secondes, jaune 5 secondes et rouge 20 secondes.
- La distance entre A et B est de 200 mètres.
- Avec son vélo, il peut choisir de rouler entre 10 et 15 km/h.

1. Au moment où il se trouve en A, Léo constate que le feu passe au rouge. Peut-il s'arranger pour ne pas avoir à s'arrêter au feu ?

2. Au moment où il se trouve en A, Léo constate que le feu passe au jaune. Peut-il s'arranger pour ne pas avoir à s'arrêter au feu ?

Niveau minimum :

Classe de 4^e

Thèmes :

Calculs
Vitesse

Méthodes - compétences :

Raisonnements logiques

Commentaires :

On pourra :

- rappeler les relations qui lient durée de parcours, vitesse et distance parcourue.
- suggérer de calculer des temps nécessaires au cycliste, à différentes vitesses, pour parcourir 200 m.

Éléments de solution :

1) Oui 2) Oui

On pourra représenter sur un axe du temps les différentes phases du feu et calculer le temps mis par le cycliste pour parcourir 200 m (entre 48'' et 72'') puis conclure.

LA CLASSE INTERNATIONALE

Dans la classe de seconde ***I***, dite « Internationale », tous les élèves font au moins une langue vivante.
14 d'entre eux font de l'anglais, 13 du bulgare, 12 du croate, 5 de l'anglais et du bulgare, 4 du bulgare et du croate, 3 de l'anglais et du croate.

Combien y a-t-il d'élève en seconde ***I*** sachant qu'il n'y a qu'un seul élève qui fait les 3 langues ?

Niveau minimum :

Classe de 4^e

Thèmes :

Numération
Calculs

Méthodes - compétences :

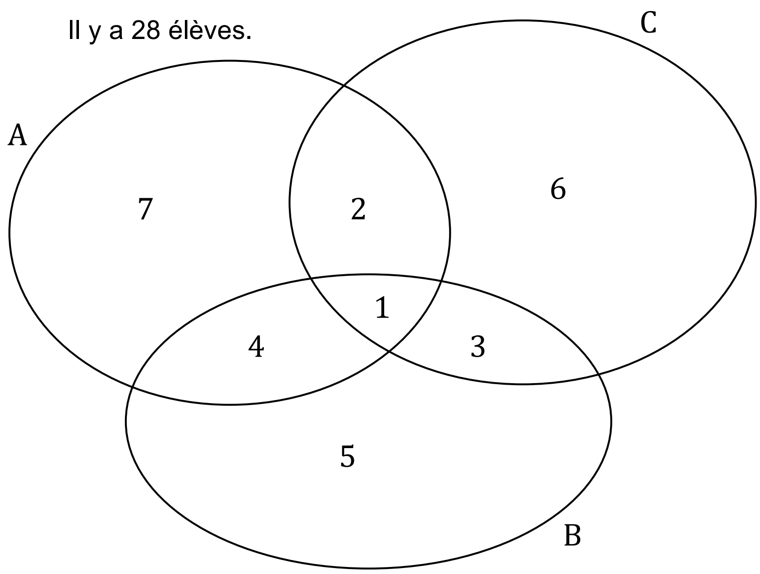
Raisonnements logiques

Commentaires :

Il sera utile d'expliquer la différence entre « faire de l'anglais » et « faire uniquement de l'anglais ».
Un diagramme du type Venn peut être suggéré après une première phase de recherche.

Éléments de solution :

Il y a 28 élèves.



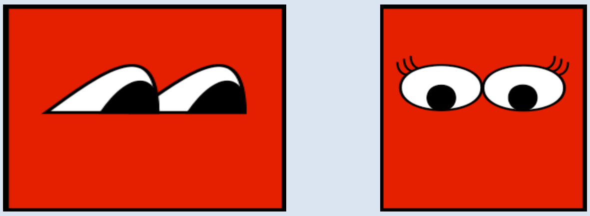
DU RECTANGLE AU CARRÉ

Voici un algorithme :

Soit un rectangle d'aire égale à 2 et de dimensions l_1 et l_2 (avec $l_1 > l_2$).
Soit un nombre p positif et non nul

Tant que la différence de l_1 et l_2 est supérieure à p :
- Faire : Tracer ce rectangle de dimension l_1 et l_2
  Calculer la moyenne l de l_1 et l_2
  On souhaite obtenir un nouveau rectangle de même aire que le précédent et de première dimension cette moyenne l. Calculer la valeur de la deuxième dimension, que l'on notera l_2.
- Si l_1 est inférieur à l_2 alors échanger les valeurs de l_1 et l_2.

Appliquer cet algorithme avec des valeurs l_1 et l_2 de votre choix et une précision p à définir.
Que peut-on en conclure ?



Niveau minimum :

Classe de 4e.

Thèmes :

Quadrilatères
Aires

Méthodes - compétences :

Mise en œuvre de l'algorithme
Conjecture
Construction
Effectuer un calcul à la calculatrice
Utiliser des logiciels

Commentaires :

L'objectif est d'approcher par encadrements de fractions la mesure du côté d'un carré dont l'aire vaut 2. Selon le niveau et la classe on pourra préciser les valeurs de départ de l_1, l_2 et p.

Eléments de solution :

On choisit par exemple : $l_1 = 0{,}8$ et $l_2 = 2{,}5$ et une précision $p = 0{,}05$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$l = \dfrac{l_1 + l_2}{2} = \dfrac{33}{20} = l_1$

$l_1 \times l_2 = 2$ d'où : $l_2 = 2 : \dfrac{33}{20} = \dfrac{40}{33}$

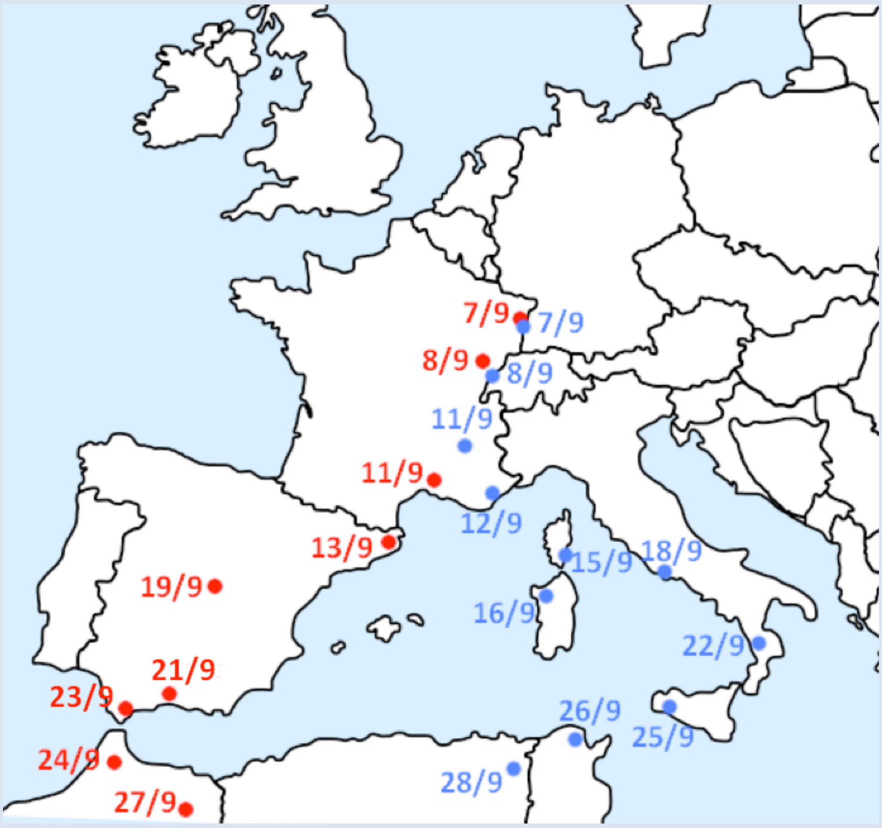
$p = l_1 - l_2 = \dfrac{289}{660} > p$ donc nous devons répéter la suite d'opérations.

Les suites de valeurs prises par l_1 et l_2 se rapprochent l'une de l'autre et leur produit vaut deux ; autrement dit, l_1 et l_2 sont des écritures fractionnaires proches de $\sqrt{2}$.
L'utilisation du tableur est ici très pertinente et permet de travailler avec une précision p assez fine.

MIGRATION DES CIGOGNES

A l'aide d'une balise ARGOS, on a suivi les différentes positions de deux cigognes, Marthe (en rouge) et Mireille (en bleu), lors de leur migration vers l'Afrique.

Calculer la distance parcourue par chacune des cigognes.



Niveau minimum :

Classe de 5^{e}

Thèmes :

Echelle, carte
Proportionnalité
Distance

Méthodes - compétences :

Effectuer des tracés à la règle
Mesurer
Utiliser un plan
Rechercher des informations
Effectuer des calculs de proportionnalité

Commentaires :

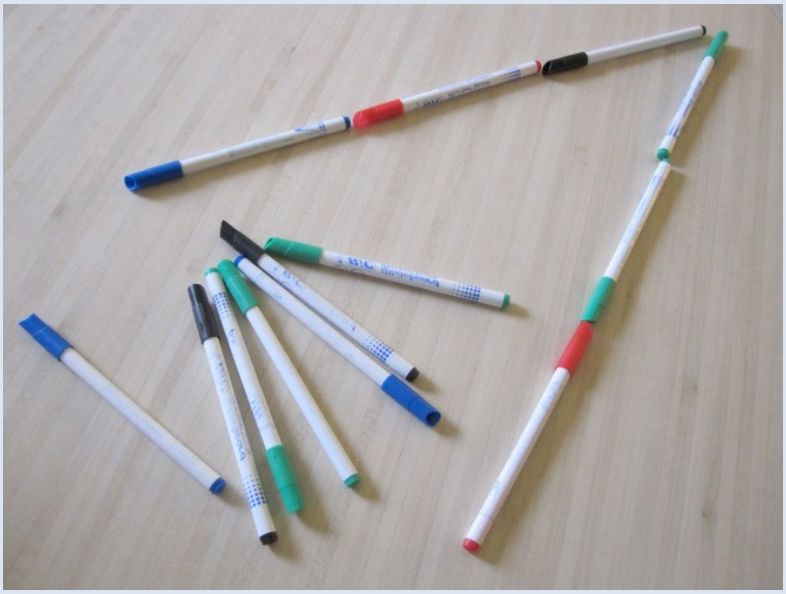
L'échelle de la carte n'est pas donnée. Les élèves devront effectuer des recherches pour retrouver une échelle approximative de la carte.
Une autre solution pourrait consister à reporter les étapes du voyage sur une autre carte dont l'échelle est connue.

A noter, que Google Earth offre la solution au problème très simplement. Le logiciel pourrait permettre de vérifier en classe les résultats trouvés.

Eléments de solution :

Marthe : 2400 km
Mireille : 2750 km

LES FEUTRES



Combien existe-t-il de triangles différents construits en assemblant 13 feutres exactement ?

Niveau minimum :

Classe de 5e

Thèmes :

Arithmétique
Triangles
Inégalité triangulaire
Longueur

Méthodes - compétences :

Essai erreur
Tâtonnement
Disjonction des cas
Manipulation
Construction
Déduction
Contrôler

Commentaires :

L'activité permet d'appliquer l'inégalité triangulaire de façon intuitive et ludique.
Les élèves peuvent ainsi visualiser de nombreux triangles de périmètre imposé et de longueur entière de côtés. Le feutre symbolise ainsi l'unité.
L'élève conjecture assez rapidement qu'il est nécessaire de garder suffisamment de feutres pour les deux côtés restants une fois le premier côté fixé.

Eléments de solution :

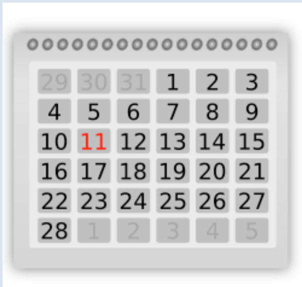
Il existe 5 triangles différents :
1-6-6
2-5-6
3-4-6
3-5-5
4-4-5

29 FÉVRIER

Le mois de février compte 29 jours uniquement lors d'une année bissextile. Une année est bissextile si elle est soit divisible par 400, soit divisible par 4 ET non divisible par 100.

1) Les années 2012, 2050, 2100, 2400 sont-elles bissextiles ?

2) Ce calendrier existe depuis 1582. Sans tenir compte des courtes périodes révolutionnaires où un autre calendrier à été mis en place, combien y-a-t-il eu de 29 février depuis l'an 1582 ?



Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Divisibilité
Négation et connecteurs logiques ET/OU

Méthodes - compétences :

Evaluer la divisibilité par 4, 100 et 400
Organiser un dénombrement

Commentaires :

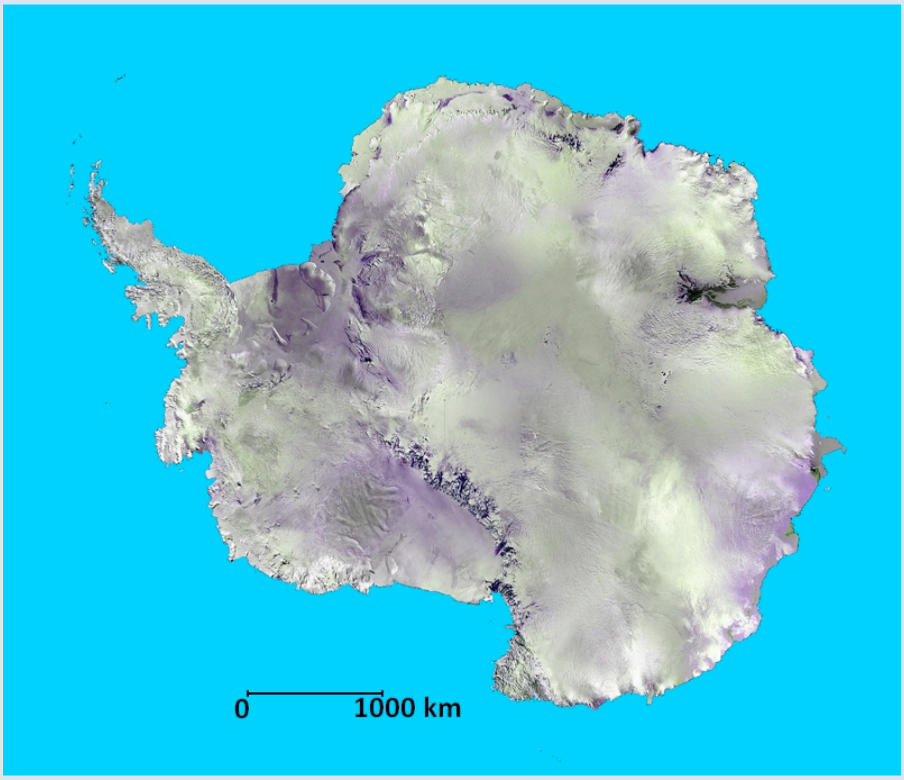
La difficulté réside dans l'interprétation des connecteurs ET et OU, notamment dans la compréhension du OU au sens non exclusif. Il peut être nécessaire de réécrire l'énoncé en structurant ces connecteurs : (divisible par 400) OU ((divisible par 4) ET (non divisible par 100)).
Une représentation schématique pourrait aider les élèves à distinguer le ET du OU.

Eléments de solution :

1) 2012 et 2400 sont bissextiles.
2050 et 2100 ne sont pas bissextiles.
2) Sans compter les centenaires, il y a 24 années bissextiles par siècle.
On exclut les années 1700, 1800 et 1900, mais on compte les années 1600 et 2000.
De 1582 à 2012 inclus, il y a donc eu 101 années bissextiles et autant de 29 février.

L'ANTARCTIQUE

Estimez l'aire de l'Antarctique.



D'après enquête PISA 2003

Niveau minimum :

Classe de 6e

Thèmes :

Figures planes
Cercles, compas
Construction
Tracé
Echelle
Aire
Proportionnalité.

Méthodes - compétences :

Effectuer des tracés à la règle, au compas
Utiliser des formules
Traiter une situation de proportionnalité
Utiliser une carte
Découpage
Soin, précision.

Commentaires :

Une carte de l'Antarctique est donnée avec l'échelle. L'Antarctique possède une forme curieuse qui semble être formée de morceaux de disques.
Les élèves pourront effectuer un "découpage" du continent en figures dont les formules de calcul d'aire sont connues.
Un découpage moins précis en polygone pourrait également être envisagé.

Eléments de solution :

On peut attendre un résultat compris entre 12 et 16 millions de km^2.
La superficie officielle est environ égale à 14 millions de km^2.

BILLARD

Le billard américain est un jeu comportant 15 boules numérotées de 1 à 15 et une boule blanche.
La partie est terminée lorsqu'il ne reste que la boule blanche sur le tapis.
Arthur et Lola comptent leurs points en fin de partie, toutes les boules sont réparties entre les deux joueurs.
Lola a exactement deux fois plus de points qu'Arthur alors qu'elle a moins de boules.

Comment est-ce possible ? Donner plusieurs solutions.

D'après Mathématiques sans Frontières 2013

Niveau minimum :

Classe de 6e

Thèmes :

Addition
Soustraction
Multiplication

Méthodes - compétences :

Raisonnement par essais
Optimisation
Respect d'une contrainte
Résolution de problème

Commentaires :

On peut envisager de prolonger l'exercice en prenant 20 boules numérotées de 1 à 20. La recherche de toutes les combinaisons possibles est moins rapide.
On peut demander également de partager équitablement les boules pour obtenir le même nombre de points avec 15 et 20 boules.
Un autre prolongement est de demander combien de boules sont nécessaires pour qu'Arthur obtienne 100 points, etc…

Éléments de solution :

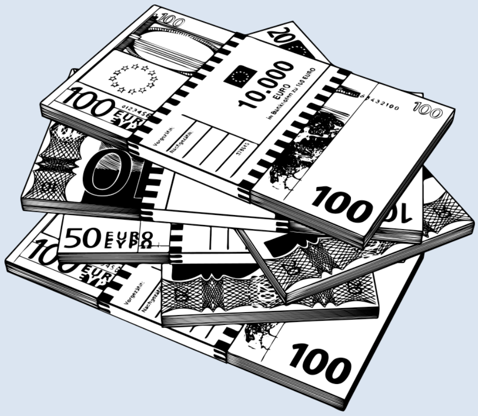
- Pour 15 boules, la somme totale est 120.
Lola peut avoir les boules n° 13 à 15 et les boules n° 8 et 10.
Arthur a alors les boules n°1 à 7 puis 9, 11 et 12.
- Pour 20 boules, la somme totale est 210.
- On ne peut pas partager les 15 boules équitablement (nombre impair) mais on peut le faire avec les 20 boules.
- Avec 24 boules, Lola a 200 points et Arthur 100.

UN MINIMUM DE MONNAIE !

Si je veux payer la somme de 1937€ en utilisant un minimum de billets et de pièces de 100€, 50€, 20€, 10€, 5€, 2€ et 1€, je procède de la façon suivante :
À chaque étape, je choisis le plus « gros » billet ou pièce de valeur X pour passer de la somme S à la somme S – X.

Je répète l'étape autant de fois que nécessaire.

Combien de billets et de pièces de chaque type aurais-je besoin pour régler la somme de 1937€ ?



Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Dénombrement
Ordonner

Méthodes - compétences :

Mise en œuvre d'un algorithme
Optimisation

Commentaires :

Au départ S=1937€ et X=100€. À l'étape suivante, S-X=1837 et X est à nouveau égal à 100€. Au bout de 19 étapes, S-X=37€ et X=20€.

On pourra bien sûr proposer d'autres montants afin de tester l'algorithme sur différentes sommes.

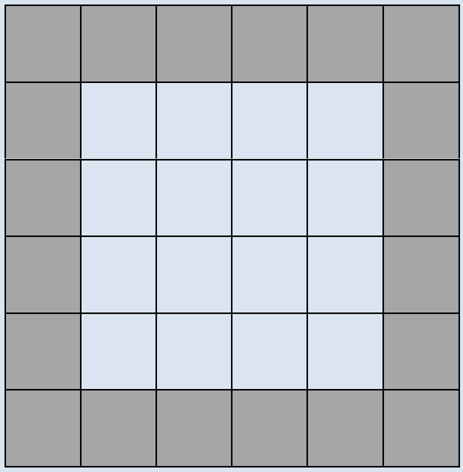
Prolongement possible :
Existe-t-il plusieurs solutions ?

Éléments de solution :

On obtient : 19 billets de 100€, 1 billet de 20€, 1 billet de 10€, 1 billet de 5€ et 1 pièce de 2€

CARRÉS DÉNOMBRÉS

Dans la figure ci-dessous, quel est le nombre de carreaux grisés ?



Établir une formule permettant de calculer le nombre de carreaux grisés lorsque le nombre de carreaux sur le côté du carré est 50.

Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Dénombrement
Calcul littéral
Puissances

Méthodes - compétences :

Raisonnement par induction
Découpage mental
Dénombrement
Conjecture

Commentaires :

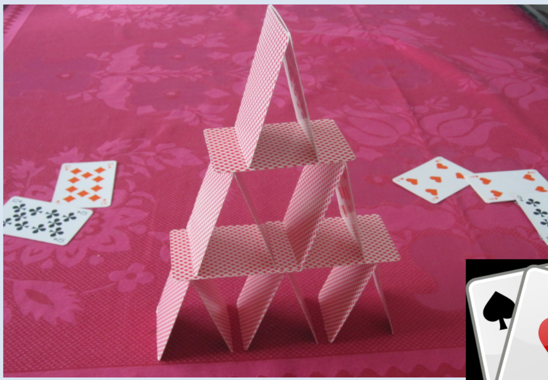
Exercice de dénombrement qui permet une discussion entre les élèves selon les formules trouvées. Cet exercice est également l'occasion de travailler le calcul littéral dès la classe de 6^e.
En 4^e ou en 3^e, on peut établir une conjecture pour un carré de côté n et appliquer des identités remarquables.

Eléments de solution :

Pour 50, on obtient 196 carreaux grisés.
Voici quelques méthodes de raisonnement : soit N le nombre de carreaux grisés

$N = 4n - 4$ $\quad$ $N = 2n + 2(n - 2)$
$N = 4(n - 1)$ $\quad$ $N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$
$N = n^2 - (n - 2)^2$

LE CHATEAU DE CARTES



Combien faut-il de cartes pour construire un château de 3 étages ? 5 étages ? Puis 12 étages ?

Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Algorithme
Dénombrement
Addition, somme
Arithmétique
Calcul

Méthodes - compétences :

Mise en œuvre d'un algorithme
Réalisation d'un schéma
Conjecturer
Logique

Commentaires :

Plusieurs prolongements sont possibles. Avec un tableur, il est possible de résoudre le problème pour un grand nombre d'étages.
On pourra également demander combien d'étages au maximum il est possible de réaliser avec deux jeux de 52 cartes.
L'exercice se prête bien à la construction d'un algorithme et à sa programmation : pour un nombre de cartes donné, combien d'étages ? (Niveau 2de)
En classe de1^{e} S ou ES, on pourrait demander de résoudre le cas général de *n* étages.

Eléments de solution :

3 étages : 15 cartes
5 étages : 40 cartes
12 étages : 222 cartes

FORMAT PAPIER, DE A0 À A4 ...

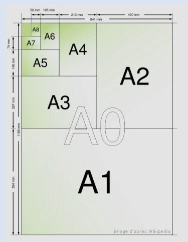
Prendre une feuille rectangulaire d'aire 1.
Noter sa longueur et sa largeur.

Effectuer 5 fois de suite les étapes suivantes :

- *Plier la feuille en deux. On obtient un rectangle plus petit.*
- *Noter sa longueur et sa largeur.*

1) Avec un rectangle de dimensions de votre choix, appliquer les consignes ci-dessus.

2) Que peut-on conjecturer concernant le quotient de la longueur par la largeur des rectangles obtenus si l'on applique les consignes avec un rectangle de dimension A0, soit : 841 mm x 1189 mm ?



Niveau minimum :

Classe de 6^e.

Thèmes :

Quadrilatères
Aires
Proportionnalité

Méthodes - compétences :

Mise en œuvre de l'algorithme
Conjecture
Construction
Effectuer un calcul à la calculatrice
Utiliser des logiciels

Commentaires :

Si l'on choisit comme format de départ un rectangle de taille A0 (841 mm x 1189 mm), on obtiendra par cet algorithme l'ensemble des formats A1, A2, A3, etc.
Le quotient de la longueur et de la largeur du rectangle obtenu est égal à $\sqrt{2}$.
On pourra par exemple demander aux élèves de calculer les mesures d'un rectangle de format A3 connaissant un autre format "inférieur".

Eléments de solution :

Le quotient de la longueur par la largeur des rectangles obtenus sont des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.
Pour le format A3 (420mm x 297mm), on trouvera $\frac{420}{297} \approx 1,4141$ pour valeur approchée de $\sqrt{2}$.

JETONS

Trois amis Stéphane, Lucas et Antoine jouent avec des jetons. À chaque manche, le perdant est celui qui possède le plus de jetons. Celui-ci donne alors une partie de ses jetons aux deux autres de telle sorte que ces derniers doublent chacun leur nombre de jetons

Après la première manche, Stéphane possède 6 jetons, Lucas 8 et Antoine 16.
Antoine est alors le perdant de la 2^{e} manche. Stéphane aura donc 6 × 2 = 12 jetons, Lucas 8 × 2 = 16 jetons et Antoine possédera 16 – 6 – 8 = 2 jetons.
Quelle sera la distribution des jetons à la fin de la 5^{e} manche ?

Un autre groupe d'amies, Maëlle, Ingrid et Anaïs possèdent respectivement 10, 9 et 8 jetons à l'issue de la 5^{e} manche ? Combien de jetons avaient-elles au départ ?

Niveau minimum :

Classe de 6^{e}/5^{e}

Thèmes :

Addition
Soustraction
Multiplication
Division

Méthodes - compétences :

Raisonnement par essais
Algorithme « changeant »
Respect d'une contrainte
Résolution de problème

Commentaires :

La manipulation avec des jetons peut aider à l'appropriation de l'algorithme du jeu.

Éléments de solution :

Stéphane : 6	Lucas : 8	Antoine : 16
Maëlle : 2	Ingrid : 18	Anaïs : 7

LISTE DE NOËL

En cette période de fin d'année, Lucas, 7 ans, est bien embêté : il doit préparer sa liste au Père Noël mais beaucoup de cadeaux lui feraient plaisir ! Le Père Noël doit gâter tous les enfants, sa commande ne doit donc pas dépasser 90 € et Lucas a beaucoup d'envies.

Dans le catalogue, il a réussi à choisir 8 jouets qu'il aimerait beaucoup. Il ne peut pas choisir deux fois le même, aidez-le à faire des listes qui respectent les contraintes. Ainsi, Lucas pourra choisir celle qui lui plaît le plus et l'envoyer.

Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Additions
Soustractions
Ordre de grandeur
Calcul mental

Méthodes - compétences :

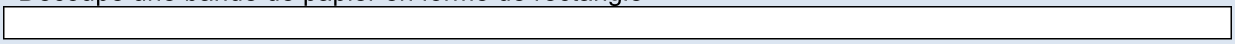
Raisonnement par essais
Optimisation
Respect d'une contrainte

Commentaires :

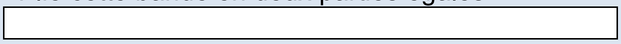
Exercice ludique d'optimisation qui permet une discussion entre les élèves selon l'utilisation ou non des ordres de grandeur dès la classe de 6^{e}.
L'exercice se prolonge facilement grâce à l'ajout ou le retrait de l'une ou l'autre contrainte, ou en changeant la liste des jouets.

PLIAGES

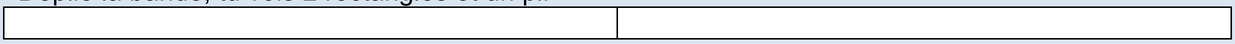
Découpe une bande de papier en forme de rectangle



Plie cette bande en deux parties égales



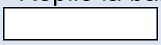
Déplie la bande, tu vois 2 rectangles et un pli



Replie la bande deux fois de suite

Déplie la bande, tu vois maintenant 4 rectangles et 3 plis :

Replie la bande, 3 fois de suite :



Et ainsi de suite…

Si l'on pouvait plier la bande huit fois de suite, combien de rectangles verrait-on ? Quel est le nombre de plis dans ce cas ?

(D'après un exercice de MSF Junior 2006)

Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Dénombrement
Puissances

Méthodes - compétences :

Raisonnement par induction
Dénombrement

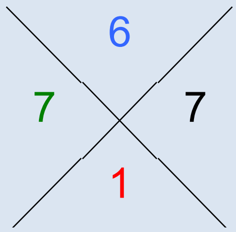
Commentaires :

Exercice de dénombrement de niveau facile. Il peut être prolongé en classe de 4^e ou de 3^e afin d'établir une conjecture sur le nombre de rectangles et le nombre de plis après avoir replié la bande 50 fois par exemple, puis *n* fois.

Eléments de solution :

Nombre de pliages	Nombre de rectangles	Nombre de plis
1	2 (=2^1)	1 (= 2-1)
2	4 (=2^2)	3 (=4-1)
3	8 (=2^3)	7 (= 8-1)
4	16 (=2^4)	15
5	32 (=2^5)	31
6	64 (=2^6)	63
7	128 (=2^7)	127
8	256 (=2^8)	255
50	2^{50}	$2^{50}-1$
n	2^n	2^n-1

PREUVE PAR 9



La preuve par 9 est un mécanisme de vérification des opérations élémentaires.

Exemple : $a = 51$ et $b = 73$. La somme $a + b$ vaut 124.

Pour chacun de ces nombres, on effectue la somme de ses chiffres.
Si la somme des chiffres dépasse 9, on réitère le processus.

On représente les résultats dans une croix, en plaçant en haut le nombre avec a, en bas celui avec b, à gauche celui avec $a + b$, à droite celui obtenu en ajoutant les chiffres du haut et du bas de la croix.

La preuve est juste si les cases de droite et gauche sont identiques.

On peut effectuer une preuve analogue pour un produit en plaçant à gauche le nombre correspondant au produit et à droite celui correspondant au produit des cases du haut et du bas.

1) Exécuter la preuve par 9 pour vérifier que : $676 + 397 = 1073$ et $47 \times 84 = 3948$.

2) Paul a calculé $184 \times 167 = 30718$ et $32755 + 26544 = 58309$
   a. Pour chaque calcul, effectuer la preuve par 9. Que peut-on en conclure ?
   b. Vérifier les calculs de Paul avec la calculatrice.

3) Parmi les affirmations ci-dessous, déterminer celles qui sont vraies.
   a. Si le calcul est juste, la preuve par 9 est juste.
   b. Si la preuve par 9 est juste, le calcul est juste.
   c. Si le calcul est faux, la preuve par 9 est fausse.
   d. Si la preuve par 9 est fausse, le calcul est faux.

Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Arithmétique
Calcul

Méthodes - compétences :

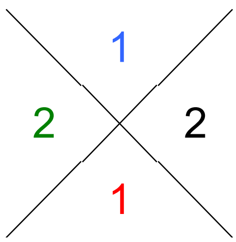
Lire et exécuter un algorithme
Interpréter

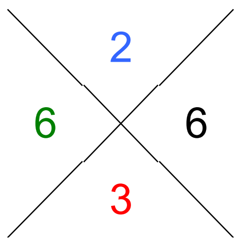
Commentaires :

Facile à aborder, par son coté algorithmique, cet exercice met toutefois de nombreuses compétences à l'œuvre, la plus délicate pour les plus jeunes étant l'interprétation du résultat.
On peut aussi se demander avec les élèves les plus avancés pourquoi cette preuve se nomme ainsi…

Eléments de solution :

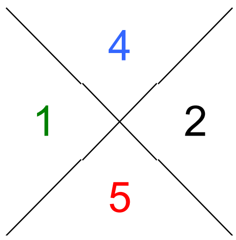
1) $676 + 397 = 1073$; $47 \times 84 = 3948$

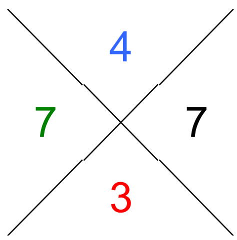




2) a. $184 \times 167 = 30718$

$32755 + 26544 = 58309$

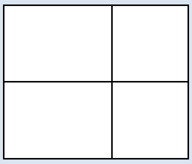




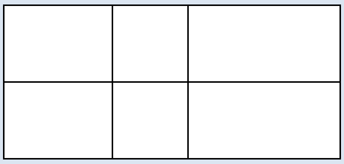
La preuve est fausse pour le premier calcul et juste pour le second.
b. $184 \times 167 = 30728$ et $32755 + 26544 = 59299$. Les deux calculs de Paul étaient faux.
2) a. Vrai b. Faux c. Faux d. Vrai

RECTANGLES DÉNOMBRÉS

1. Dans la figure ci-dessous, combien y-a-t-il de rectangles ?



2. Dans la figure ci-dessous, combien y-a-t-il de rectangles ?



3. On peut continuer l'exercice en augmentant progressivement le nombre de colonnes.

Établir une conjecture pour 10 colonnes dans le rectangle de base.

Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Dénombrement
Quadrilatères particuliers (carrés, rectangles)
Calcul littéral
Somme algébrique

Méthodes - compétences :

Raisonnement par induction
Découpage mental
Dénombrement

Commentaires :

Il s'agit d'un exercice de dénombrement.
Les élèves de 4^e pourront établir une conjecture pour *n* colonnes dans le rectangle de base. La recherche et la démonstration d'une formule explicite pourront se faire dans les classes du lycée.

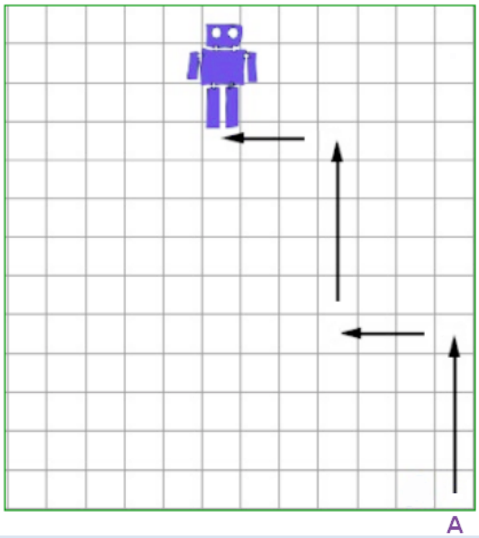
Eléments de solution :

On dénombre le nombre de rectangles formés d'un seul rectangle, puis de 2 rectangles, puis de 3 rectangles…
1. (2 colonnes) 4 + 4 + 1 = 9 rectangles
2. (3 colonnes) 6 + 7 + 2 + 2 + 1 = 18 rectangles
3. Pour 4 colonnes : 30 rectangles
Pour 5 colonnes : 45 rectangles
Pour 10 colonnes :
20+(10+18)+16+(9+14)+12+(8+10)+8+(7+6)+4+(6+2)+0+5+4+3 +2+1 = 165 rectangles
Pour *n* colonnes : la somme des nombres pairs de 0 à 2*n* + la somme des nombres entiers de 1 à *n*

$$= n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

LE ROBOT (1)

Sur un échiquier, on programme un robot en lui imposant un chemin défini par deux directions (*Haut* et *Gauche*) et pour chacune d'elle le nombre de cases à parcourir dans cette direction.



Dans l'exemple ci-contre, le robot parti de A a parcouru deux fois le chemin *Haut*(5) + *Gauche*(3).

Une fois programmé, le robot répète ce même chemin autant de fois qu'il peut avancer.
Pour s'arrêter le robot doit atteindre un bord de l'échiquier.
Mais attention, s'il atteint les limites de l'échiquier sans qu'un chemin ne soit terminé alors il ne s'arrête pas et tombe de l'échiquier.

Sur un échiquier de **360** cases sur **252**, le robot part du coin en A comme schématisé ci-dessus.

1) Programmer le robot de façon à ce qu'il rejoigne le coin diagonalement opposé sans tomber.
On donnera différents programmes *Haut*(…) + *Gauche*(…) possibles.

2) Trouver le programme *Haut*(…) + *Gauche*(…) que le robot pourra répéter le plus grand nombre de fois.

Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Repérage dans le plan
Construction
Critère de divisibilité
Division
Arithmétique, PGCD

Méthodes - compétences :

Test
Division
Mise en œuvre d'un algorithme
Optimisation
Construction d'un schéma

Commentaires :

Si l'objectif n'est pas de trouver la meilleure solution, le problème peut être posé dès la classe de sixième en effectuant des essais.
Dans le cas contraire, il faudra disposer des outils d'arithmétique enseignés en classe de troisième.

Eléments de solution :

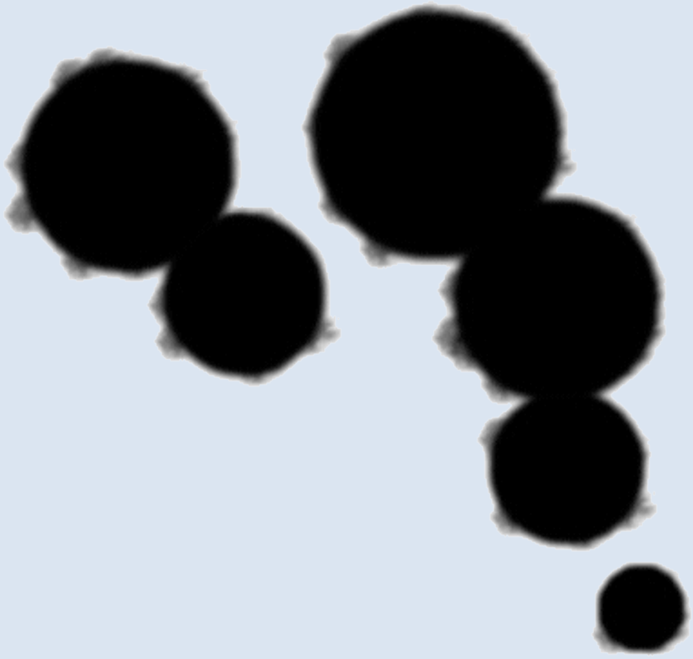
On calcule le PGCD de 360 et 252.
On trouve 36.

360 : 36 = 10
252 : 36 = 7

En considérant que la direction "Haut" correspond au 360 cases et la direction "Gauche" au 252 cases alors le robot doit être programmé de la façon suivante :
H(10) + H(7)

LES TACHES D'ENCRE

Estimez, en cm^2, la somme des aires des taches d'encre.



Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Figures planes
Cercles, compas
Construction
Tracé
Aire

Méthodes - compétences :

Effectuer des tracés à la règle, au compas
Utiliser des formules
Découpage
Soin, précision

Commentaires :

Cette activité pourra être traitée en prérequis de l'activité "Antarctique" car celle-ci ne pose pas de difficulté d'échelle.
Les taches d'encre peuvent être assimilées à des disques dont il faut évaluer les rayons pour en calculer les aires.
Un exercice semblable peut consister à demander aux élèves de tracer sur une feuille les contours de leur main et d'en évaluer la surface.

Eléments de solution :

La surface totale des taches dépend des dimensions imprimées de l'énoncé.

SEQUENCE AVEC GÉOTORTUE (1)

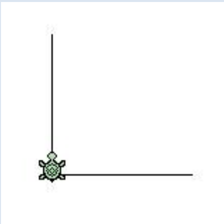
1) a) Dans la fenêtre de commande de GéoTortue, tester les commandes suivantes :

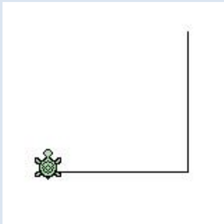
```
Fenêtre de commande
>av 50
>td 40
>re 80
>tg 70
>av 100
>vg
>
```

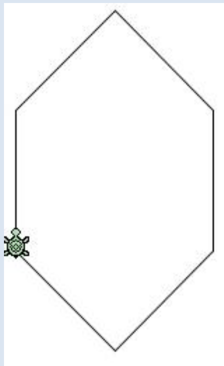
av 50, td 40, re 80, tg 70, av 100, vg

b) Dans la fenêtre de commande, tester ces commandes avec d'autres valeurs et dans l'ordre de votre choix. Observer les déplacements de la tortue. Expliquer l'effet de ces cinq commandes.

2) Rédiger et exécuter les commandes permettant de réaliser les dessins suivants :







D'autres commandes existent, elles seront explorées lors des prochaines séances « GéoTortue ».

Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Angles
Constructions

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet de découvrir l'architecture du logiciel ainsi que la syntaxe des commandes les plus simples.
Pour la première séance avec le logiciel, il est vivement conseillé de le présenter au préalable à la classe sur un exemple vidéoprojeté.

La prise en main se fait ensuite très facilement car l'élève visualise le résultat de sa commande directement en observant les mouvements de sa tortue. L'élève travaille en autonomie.

Prévoir une heure pour cette séance qui permet de comprendre les « effets » de quelques commandes.

Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Eléments de solution :

Commandes possibles pour les 3 dessins :

```
Fenêtre de commande
>av 100
>re 100
>td 90
>av 100
>re 100
>tg 90
```

```
Fenêtre de commande
>av 100
>tg 90
>av 100
>re 100
>tg 90
>av 100
>td 90
```

```
Fenêtre de commande
>av 100
>td 45
>av 100
>td 90
>av 100
>td 45
>av 100
>td 45
>av 100
>td 90
>av 100
>td 45
```

SEQUENCE AVEC GÉOTORTUE (2)

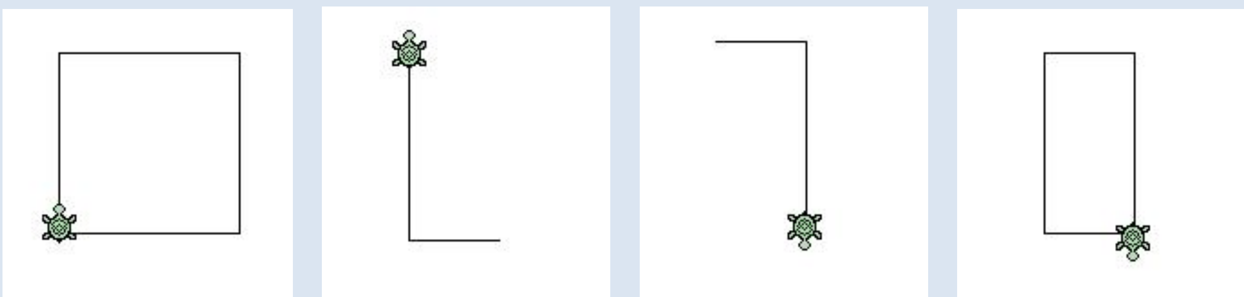
1) a) Dans la fenêtre de *procédures* de GéoTortue, recopier la procédure suivante :

```
Procédures
1> pour premierdessin
2> av 100
3> td 120
4> av 100
5> td 120
6> av 100
```

pour permet de définir le nom de la procédure
vg pour effectuer un vide graphique (réinitialisation)
td pour tourner à droite en degré
av pour avancer en unité graphique
tg pour tourner à gauche en degré

b) Dans la fenêtre de *commande*, saisir `> premierdessin` pour exécuter la procédure. Observer la tortue.

2) Rédiger et exécuter de nouvelles procédures pour réaliser les dessins suivants :



Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Angles
Constructions
Déplacements
Quadrilatères

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet d'apprendre à créer des procédures avec le logiciel GéoTortue.
Il est conseillé de proposer en prérequis l'activité "Séquence avec GéoTortue (1)".

La prise en main se fait ensuite très facilement car la possibilité de visualiser la procédure durant sa réalisation facilite l'autocorrection.

Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Éléments de solution :

Procédures possibles pour les 3 premiers dessins :

```
Procédures
1> pour carre
2> av 100
3> td 90
4> av 100
5> td 90
6> av 100
7> td 90
8> av 100
9> td 90
```

```
Procédures
1> pour forme1
2> tg 90
3> av 50
4> td 90
5> av 100
```

```
Procédures
1> pour forme2
2> td 90
3> av 50
4> td 90
5> av 100
```

Académie de Strasbourg

SEQUENCE AVEC GÉOTORTUE (3)

1) a) Dans la fenêtre de commande de GéoTortue, tester les commandes suivantes :

```
rep 4 [ av 50 ; td 90 ]
```

ou

```
rep 4 [
av 50
td 90
]
```

rep permet de répéter plusieurs fois (ici, 4) un bloc de commande

b) Quelle est la nature de la figure obtenue ?

2) Rédiger de nouvelles procédures permettant de réaliser chacune des figures suivantes :

- un triangle équilatéral,
- un hexagone régulier,
- un polygone régulier au choix.

Niveau minimum :

Classe de 6e jusqu'au triangle équilatéral
Classe de 3e pour les polygones réguliers

Thèmes :

Angles
Constructions
Déplacements
Quadrilatères

Méthodes - compétences :

Algorithmique
Raisonnement
Essais, tâtonnements
Programmation

Commentaires :

Cette activité permet d'apprendre à utiliser des boucles dans les procédures GéoTortue.

Il est conseillé de proposer en prérequis les activités "Séquence avec GéoTortue (2) et (3)".

Pour télécharger le logiciel : http://geotortue.free.fr/

Éléments de solution :

Procédures possibles pour l'énoncé :

rep 3[av 50 ; td 120] pour la construction d'un triangle équilatéral.

rep 6[av 50 ; td 60] pour la construction d'un hexagone.

Cas général: rep k [av 50 ; td 360/k] pour la construction d'un polygone à k côtés.

```
pour poly_reg
k:=15
rep k [ av 50; td 360/k ]
fin
```

Ici un exemple de procédure permettant de construire un polygone régulier à 15 côtés.

TOUR DE MAGIE (1)

Arthur prétend être un grand magicien. Il demande à sa copine Manon de lui donner un nombre à trois chiffres, par exemple 503.

Voici une formule magique :
« Multiplie ce nombre par 7 à la calculatrice sans me donner la valeur, puis par 11, puis par 13. »

Et Arthur donne la réponse de tête : 503 503 !!!

Quelle est son astuce ?

Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Multiplication
Arithmétique
Calcul littéral
Programme de calcul

Méthodes - compétences :

Calcul mental

Commentaires :

Cet exercice met en œuvre un programme de calcul dont le résultat est étonnant.
Les élèves pourront tester le programme pour différentes valeurs choisies au départ.

Eléments de solution :

En fait $7 \times 11 \times 13 = 1001$

Et on a alors : $\overline{abc} \times 1001 = \overline{abcabc}$

TOUR DE MAGIE (2)

Emilie prétend être une grande magicienne. Elle demande à son copain Aurélien de lui donner un entier, par exemple 425.
Voici sa formule magique : « Ajoute ce nombre à son précédent et à son suivant avec ta calculatrice »
Sans attendre la réponse d'Aurélien, Emilie annonce le résultat effectué "de tête" : 1275 !!!
Quelle est son astuce ?

Alicia, qui a surpris la conversation, leur dit : « Je suis bien plus forte que vous, je peux vous donner la somme de 425, des deux nombres précédents et des deux nombres suivants, c'est 2125 »
Qu'en pensez-vous ?

Aurélien propose alors : « Moi, j'ai plus dur : combien vaut la somme de trois nombres pairs consécutifs ?
Par exemple : 124 + 126 + 128 ? Facile, c'est 378 ! »
Comment a fait Aurélien ?

Proposez de même un « tour de magie » !!!

Niveau minimum :

Classe de 6^{e}

Thèmes :

Arithmétique
Calcul littéral
Programme de calcul

Méthodes - compétences :

Calcul mental

Commentaires :

Cette activité permet d'entraîner les élèves au calcul mental par le biais de programmes de calcul.
Les démonstrations à l'aide de calculs littéraux pourront être proposées à partir de la classe de 5^{e}.

Eléments de solution :

$n - 1 + n + n + 1 = 3n$
$n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 5n$
$n - 2 + n + n + 2 = 3n$

TRI SELECTIF

Un ordinateur parcourt une liste de nombres de gauche à droite. Si deux nombres consécutifs sont rangés dans l'ordre décroissant, il les intervertit. Il répète ce parcours complet de la liste jusqu'à ce que les nombres soient rangés dans l'ordre croissant.

Par exemple avec la liste 4-8-3-6, les comparaisons successives ont été colorées en rouge si elles entrainent une interversion des nombres, en bleu sinon :

4-8-3-6
4-8-3-6
4-3-8-6
4-3-6-8
3-4-6-8
3-4-6-8

1) Exécuter ce tri avec la liste 9-4-7-1, en appliquant le même code couleur.

2) Avec une liste de six nombres, combien au maximum l'ordinateur doit-il faire de comparaisons avec ce tri pour être assuré que les nombres sont rangés dans l'ordre croissant ?

Niveau minimum :

Classe de 6^e

Thèmes :

Algorithme
Ordre et comparaison

Méthodes - compétences :

Application d'un algorithme
Observation

Commentaires :

Pour justifier la réponse à la deuxième question, on peut montrer qu'après un passage sur la liste, le terme le plus grand se retrouve nécessairement en dernière position, et que cette position ne bougera plus, puis qu'après le deuxième passage, l'avant dernier terme sera aussi à sa place définitive.
Pour une liste de n termes, chaque passage sur la liste fera (n-1) comparaisons. Il y aura au plus (n-1) passages. On a donc $(n-1)^2$ comparaisons nécessaires.
La remarque précédente permet aussi d'optimiser l'algorithme. Après deux passages, il est inutile de comparer les deux derniers termes qui sont nécessairement bien rangés, puis les trois derniers termes après trois passages. On peut ainsi proposer un nouvel algorithme ne nécessitant que

$$(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

comparaisons (soit 15 comparaisons au lieu de 25 par exemple avec 6 termes dans la liste).

Eléments de solution :

1) 9-4-7-1
4-9-7-1
4-7-9-1
4-7-1-9
4-7-1-9
4-1-7-9
4-1-7-9
1-4-7-9
1-4-7-9

2) Il faut faire au maximum 5×5 = 25 comparaisons.

LA NUMERATION DES TRIOZ

Sur la planète Triozon, les habitants, les trioz, ne possèdent que trois doigts. De ce fait, leur numération ne contient que 3 symboles :

Notre "0" se note : ★
Notre "1" se note : ⦿
Notre "2" se note : ⊗

Dans notre système de numération, il existe 10 symboles différents pour écrire les nombres :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Pour écrire un nombre au delà de 9, nous devons utiliser deux symboles. Le nombre qui suit neuf s'écrit ainsi : 1 0

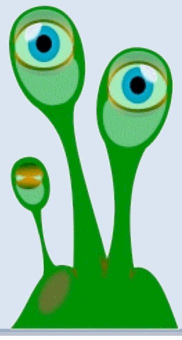
Sur la planète Triozon, c'est au delà du nombre 3 que les habitants doivent utiliser plusieurs symboles :
"3" s'écrit : ⦿★
"4" s'écrit : ⦿⦿
"5" s'écrit : ⦿⊗
Puis "6" s'écrit : ⊗★

1) Écrire 7 puis 8 en numération trioz.

2) À partir de quel nombre les trioz utilisent-ils trois symboles ?

3) Écrire dans notre numération le nombre trioz suivant : ⦿⊗★⊗

4) Écrire les nombres 45 et 62 en numération trioz.



Niveau minimum :

Classe de 6e

Thèmes :

Numération
Nombres entiers
Calculs
Arithmétique
Puissances

Méthodes - compétences :

Déduction
Raisonnements logiques

Commentaires :

Ce problème donne l'occasion de travailler l'écriture des nombres et en particulier le rang des chiffres.
Les questions proposées sont à titre d'exemple. Il est possible de prolonger le problème par d'autres situations concrètes.
On pourra par exemple envisager des échanges d'argent entre les trioz :
"L'un donne ⦿⊗⊗, l'autre lui rend ⦿★. Combien le premier a-t-il payé ?"
On peut également demander une formule générale pour passer d'un nombre trioz à n symboles à notre système de numération.
Dans les classes du lycée, on pourra demander de formuler un algorithme en langage naturel (ou utiliser la fonction MOD du tableur) pour l'écriture d'un nombre en trioz.

Eléments de solution :

1) ⊗⦿ et ⊗⊗

2) À partir du nombre 9.

3) 47

4) ⦿⊗★★ et ⊗★⊗⊗