Eléments de logique et de raisonnement dans les nouveaux programmes de mathématiques

Les programmes de collège

- *Utilisation des propriétés et définitions*
- *Propriétés caractéristiques*
- *Équivalence (théorème de Pythagore)*
- *Connaître et utiliser un énoncé réciproque* (théorème de Thalès)

  Mais les propriétés sont formulées et utilisées dans les deux sens (direct et réciproque)
- ***Initier** les élèves à la démonstration, conduire sans formalisme des raisonnements géométriques simples*
- ***Développer** les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration*

Conclusion : raisonnement déductif initié mais non maîtrisé

Présentation des contenus pour le lycée

- Langage des ensembles : élément, appartenance, inclusion, réunion, intersection et complémentaire . Savoir utiliser les symboles correspondants ;
- Utiliser correctement les connecteurs « et », « ou » ;
- Dans une proposition conditionnelle, distinguer les propositions directe, réciproque, contraposée ;
- Utiliser à bon escient les expressions "condition nécessaire", "condition suffisante" ;
- Repérer et utiliser les quantificateurs universel et existentiel. Symboles possibles mais non exigibles ;
- Formuler la négation d'une proposition ;
- Utilisation du contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- Reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : disjonction de cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Objectifs des nouveaux programmes

<table>
<tr><td colspan="3">En seconde
Avoir acquis une expérience
Commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique courante</td></tr>
<tr><td>En première S</td><td>En première ES</td><td>En premières
STI2D et STL</td></tr>
<tr><td>• prolongement de la seconde : capacité d’argumentation et de logique dans tous les champs du programme

• <u>rédaction</u> d’une démonstration

• Objectif : éléments maitrisés en fin de cycle</td><td>• prolongement de la seconde : capacité d’argumentation et de logique dans tous les champs du programme

• Objectif : bonne maîtrise en fin de cycle</td><td>• prolongement de la seconde : capacité d’argumentation et de logique dans tous les champs du programme</td></tr>
</table>

Comparaison

Généralités des anciens programmes	Généralités des nouveaux programmes
• Le développement de l'**argumentation** et l'entraînement à la **logique** font partie intégrante **des exigences des classes de lycée.**	• Le développement de l'**argumentation** et l'entraînement à la **logique** font partie intégrante **des exigences des classes de lycée.** • Éléments de logique : introduits au cours du **traitement d'une question** en fonction de leur **utilité.**
• **Pas de cours formel mais …**	• **Pas de cours spécifique mais …** ➢ des temps de **synthèse** (seconde et toutes les premières)**.** ➢ des moments d'**institutionnalisation** des concepts/types de raisonnements et de synthèse (première S)**.**
• **… aborder la logique dans les problèmes**	• **… lorsque les points ont été abordés plusieurs fois en situation.**
• La logique est présente **dans tous les paragraphes de géométrie.**	• La logique apparaît **dans tous les champs du programme**

Evaluation

- Pas d’exigence prématurée sur la forme
- Distinguer le fond de la forme
- Valoriser les écrits intermédiaires
- Valoriser/évaluer les interventions orales (dialogue, débat)
- Valoriser sous forme de bonus
- QCM et Vrai/Faux : occasions d'évaluer les différentes notions de logique

CONCLUSION

- **l'objectif final de maîtrise est exigeant**
- **les notions doivent être abordées tôt, dès la 2nde, et être réinvesties régulièrement**
- **ces notions apparaissent dans tous les champs du programme (et non plus essentiellement dans le cadre d'activités géométriques)**
- **travailler la logique permet de travailler différemment et d'approfondir les notions en jeu dans les chapitres**

Les implications dans le raisonnement mathématique		
• Comprendre le sens d'une implication et l'utiliser correctement ; • Comprendre l'implication réciproque ; • Comprendre ce que signifie l'équivalence comme double implication ; • Travail sur la condition suffisante.		
	Classe de seconde : découverte	**Classe de seconde : réinvestissement**
L'implication l'équivalence	• De la logique en français • Égalités de distance et configurations géométriques • Égalités de carrés	• Configurations et égalités de vecteurs • Équations et carrés • Positions relatives dans l'espace • Trinôme

Les implications dans le raisonnement mathématique		
	Classe de première	**Classe de terminale**
	• Comprendre les notions de conditions nécessaires et suffisantes • Raisonner par équivalence	
L'implication l'équivalence	• Un peu tous les chapitres • Trinômes • Fonctions usuelles	• Exercice transversal

Travail sur l'implication :

de la logique en français

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris.

Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?
2. A l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.

   Est-ce un cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.

   Porte-t-il une chemise rouge ?

Travail sur l'implication

Fabrique d'implications

1. Etudier si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier les réponses.
   a) Si K est le milieu de [AB], alors KA=KB.
   b) Si KA=KB, alors K est le milieu de [AB].
   c) Si K est le milieu de [AB], alors KA+KB=AB.
   d) Si KA+KB=AB, alors K est le milieu de [AB].
   e) Si K appartient à [AB], alors KA+KB=AB.
   f) Si KA+KB=AB, alors K appartient à [AB].

2. On donne ci-dessous des phrases ou des égalités .
   Ecrire toutes les implications vraies.

$IM = IM'$

M' est l'image de M par la symétrie de centre I

M' appartient à (IM)

$IM + IM' = MM'$

I est le milieu de $[MM']$

I appartient à $[MM']$

Travail sur l'implication
Trinôme en première

1. On considère un trinôme $f(x)= ax^2+bx+c$ (a, b et c réels et $a \neq 0$) et son discriminant Δ.

   P désigne sa représentation graphique.

   Dire si les implications sont vraies. Qu'en est-il de leur réciproque ?

   a) Si f a des racines opposées alors $b=0$.

   b) Si pour tout réel x , $ax^2+bx+c \leq 0$, alors $\Delta < 0$.

2. On considère un trinôme $f(x)= ax^2+bx+c$ (a, b et c réels et $a \neq 0$).

   On considère la proposition (P1) : "Si $ac < 0$, alors l'équation $f(x)=0$ a deux solutions distinctes."

   a) La proposition (P1) est-elle vraie ? Justifier.

   b) Enoncer la contraposée (P2) de (P1).

   La proposition (P2) est-elle vraie ? Justifier.

   c) Enoncer la réciproque (P3) de la proposition (P1).

   La proposition (P3) est-elle vraie ? Justifier.

Travail sur l’implication

Condition nécessaire et suffisante : au carrefour entre mathématique et français

Notion de condition nécessaire (notée CN)

Observons la phrase : **"Il me faut des œufs pour faire un quatre-quarts".**

- Que se passe-t-il si j'ai des œufs ?
  Les œufs ne suffisent pas.
- Que se passe-t-il si je n'ai pas d'œufs ?
  Les œufs sont <u>nécessaires</u> mais pas suffisants.

Lien entre les propositions : **quatre-quart ⇒ œufs.**

Notion de condition suffisante (notée CS)

Observons la phrase ***:*** **"Il suffit de mettre de la levure pour que la pâte lève".**

- Que se passe-t-il si je mets de la levure ?
  La levure suffit pour que la pâte lève.
- Que se passe-t-il si je n'en mets pas ?
  Elle peut ne pas lever ou lever quand même si bien aérée.
  La levure n'est pas nécessaire mais elle est suffisante.

Lien entre les propositions : **levure ⇒ gâteau gonfle**

Travail sur l'implication :
Condition nécessaire et suffisante

Phrase	Relation logique
Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, est que ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, est que ses diagonales se coupent en leur milieu.	
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.	

Travail sur l'implication :
Quelques confusions

- Demain, je t'emmènerai à la piscine s'il fait beau.

  ***Confusion entre implication directe et implication réciproque*.**
- Si tu fais bien cet exercice, tu auras une récompense.

  Confusion entre implication et équivalence.
- Pour traverser la rivière, il faut un bateau.

  Confusion entre conditions nécessaire/suffisante.

La négation d’une proposition

Distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant

1. « Tu n'as pas la moyenne ! »
2. « Tout le monde n'a pas la moyenne ! »

En mathématiques, la négation d'une proposition P est une proposition « non P » qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie :

la négation de la phrase « tout le monde a la moyenne » est « un élève au moins n'a pas la moyenne ».

Apprendre à formuler la négation d'une proposition : le Vrai/**Faux**

- f(-1) est négatif (à l'aide d'un tableau où on lit par exemple $2<f(-1)<3$)

- deux vecteurs colinéaires sont de même sens

- (U_n) définie pour $n \geq 0$ par $U_n = (n-7)^2$ est décroissante

- si $x^2 > 9$ alors $x>3$

La négation dans les activités avec les élèves

1) Le contre-exemple : la négation d'une propriété avec quantificateur universel, la négation d'une implication

Exemple de temps de synthèse:

On considère les deux égalités suivantes dans lesquelles x est un nombre réel

$(x+1)^2 = x^2+2x+1$ (1)

$(x+1)^2 = x^2+1$ (2)

L'égalité (1) est connue depuis la 3ème comme une identité remarquable, on peut remarquer que **pour tout réel** l'égalité (1) est vérifiée, dans ce cas on écrit :

« (pour tout x appartenant à **R)**, $(x+1)^2 = x^2+2x+1$»

Que penser de l'égalité (2) ? pour x=0, elle est vérifiée mais **pour x= 1, elle ne l'est pas**!

Ecrire « (pour tout x appartenant à **R**), $(x+1)^2 = x^2+1$» est faux puisqu'il existe (au moins) un nombre réel *x* tel que $(x+1)^2$ différent de x^2+1
(Un seul contre-exemple suffit)

2) Le raisonnement par contraposée:

utiliser « non Q implique non P » vraie lorsque « P implique Q » vraie

- Dans un repère orthonormé, on donne les points M(3; -2), N(-2; -3) et P(-4; 3). Le triangle MNP est-il rectangle ?

- Variations de la fonction racine carrée:

Pour montrer que $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

on montre que $\sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow a > b$

3) Négation et connecteurs logiques:
non (A et B) signifie non A ou non B

Soit (U_n) une suite vérifiant la relation $U_{n+1} = 0,5U_n + 3$ pour $n \geq 0$

Déterminer un algorithme pour qu'il donne (pour u_0 fixé) la plus petite valeur de *n* pour laquelle $5,99 < u_n < 6,01$

entrée : initialisation $n = 0$, $u = u_0$

sortie : n

traitement : Tant que (u *<=5,99 OU* u *>=6,01) faire*

incrémenter *n* de 1

affecter 0,5 u *+ 3 à u*

Fin tant que