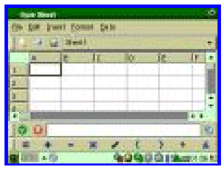
Série STG
Journées de formation
Janvier 2006

Remboursement d'un emprunt par annuités constantes



Utilisation du tableur

Le principe

Un emprunteur s'adresse à un prêteur pour obtenir une somme d'argent (*la dette*) qu'il s'engage à rembourser en versant chaque année, durant *n* années, une *annuité* au prêteur. En général, les annuités versées chaque année sont constantes

- Le prêteur estime que le capital prêté doit lui rapporter un intérêt annuel égal à *t*% du montant de la dette.
- Ainsi, l'annuité *a* remboursée l'année *n* est constituée de deux éléments :
  - L'intérêt I_n produit par le capital restant dû.
  - L'amortissement A_n correspondant à la part de capital remboursée. Après versement de l'annuité la dette est diminuée du montant de l'amortissement.

Exemple

Si la dette se monte à 1 000€ et que taux d'intérêt est égal à 5 % alors une annuité de 80 € se décompose comme suit :

- *Intérêt : 50 € (5 % du montant de la dette)*
- *Amortissement : 30 € (montant de l'annuité diminué du montant de l'intérêt)*

Après le versement de cette annuité, la dette ne s'élève plus qu'à 1 000€ – 30€ = 970 €

Partie A : Étude d'un exemple

On souhaite établir le *tableau d'amortissement* d'un emprunt de 11 000€ sur 10 ans au taux de 4%.
L'étude sera menée à l'aide d'un tableur
Le remboursement se fait à annuités constantes selon le principe exposé précédemment.

Dans la feuille de calcul les données sont placées dans les cellules *B2, B3, B4*. Les cellules de la zone (*A7 : F16*) *contiennent des formules ou des nombres que l'on ne modifiera pas directement*. Il s'agit de trouver le nombre à placer en *B4* de manière à ce que la cellule *E16* contienne la valeur 0 ce qui signifiera que l'emprunt aura été intégralement remboursé.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Emprunt	11 000,00 €				
3	Taux	4,00%				
4	Annuité	800,00 €				
5						
6	**Années**	**Dette en début d'année**	**Intérêt**	**Annuité**	**Dette en fin d'année**	**Amortissement**
7	1	11 000,00 €	440,00 €	**800,00**	10 640,00 €	360,00 €
8	2					
9	3					
10	4					
11	5					
12	6					
13	7					
14	8					
15	9					
16	10				0,00 €	

Questions

1. Expliquer comment on peut obtenir la série de nombres de la zone (A7:A16). Quelle est la formule à placer en *B7* ? Quelles formules, destinées à être recopiées vers le bas faut-il placer dans les cellules *C7, D7, E7, F7, B8* ?

Cellule	Formule
C7	
D7	
E7	
F7	
B8	

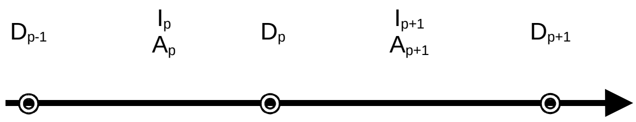
2. En procédant par *approximations successives* quel est le montant de l'annuité qui fera en sorte que la cellule E16 contienne la valeur 0.
3. Imprimer le *tableau d'amortissement*.
4. Vérifier qu'alors la suite des amortissements est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
5. Construire de manière analogue le tableau d'amortissement d'un emprunt de 11 000€ sur 15 ans au taux de 4%

Partie B : Étude théorique (travail sur les suites)

Cette partie (difficile) pour nos élèves ne pourra être donnée sous cette forme et sert uniquement de complément théorique à l'étude précédente.

Notations

D_p	Dette en début de l'année *p*
A_p	Amortissement de la $p^{ème}$ année
i	Taux d'intérêt



Par définition on a : $a = I_p + A_p$; $D_p = D_{p-1} - A_p$; $I_p = iD_{p-1}$

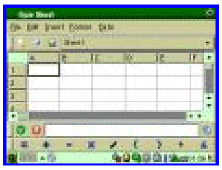
1. En utilisant le fait que l'annuité de la $p^{ème}$ année est égale à celle de la $(p+1)^{ème}$ année donc que : $A_{p+1} + iD_p = A_p + iD_{p-1}$ montrer que : $A_{p+1} = (1+i)A_p$. Quelle est la nature de la suite (A_p) ?
2. Si l'emprunt est remboursé en *n* années, *la somme des amortissements est égale au montant de la dette initiale* c'est-à-dire au montant emprunté : $D_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Montrer alors que : $D_0 = A_1 \dfrac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = A_1 \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
3. En partant de l'égalité $a = iD_0 + A_1$ et en utilisant le résultat précédent, montrer que :
$$a = iD_0 \frac{1}{1-(1+i)^{-n}}$$
4. En utilisant la formule précédente, construire à l'aide du tableur une feuille de calcul qui affiche un tableau d'amortissement « *universel* » où les seules données à saisir sont :
   - Le montant de l'emprunt
   - Le taux d'intérêt en vigueur
   - Le nombre d'annuités

Emprunt	**11 000,00 €**
Taux	**5,00%**
Durée	**15**

Années	**Dette en début d'année**	**Intérêt**	**Annuité**	**Amortissement**
1	11 000,00 €	550,00 €	1 059,77	509,77 €
2	10 490,23 €	524,51 €	1 059,77	535,25 €
3	9 954,98 €	497,75 €	1 059,77	562,02 €
4	9 392,97 €	469,65 €	1 059,77	590,12 €
5	8 802,85 €	440,14 €	1 059,77	619,62 €
6	8 183,23 €	409,16 €	1 059,77	650,60 €
7	7 532,62 €	376,63 €	1 059,77	683,13 €
8	6 849,49 €	342,47 €	1 059,77	717,29 €
9	6 132,20 €	306,61 €	1 059,77	753,16 €
10	5 379,04 €	268,95 €	1 059,77	790,81 €
11	4 588,23 €	229,41 €	1 059,77	830,35 €
12	3 757,87 €	187,89 €	1 059,77	871,87 €
13	2 886,00 €	144,30 €	1 059,77	915,46 €
14	1 970,54 €	98,53 €	1 059,77	961,24 €
15	1 009,30 €	50,47 €	1 059,77	1 009,30 €

Série STG
Journées de formation
Janvier 2006

Programmation linéaire



Utilisation du tableur

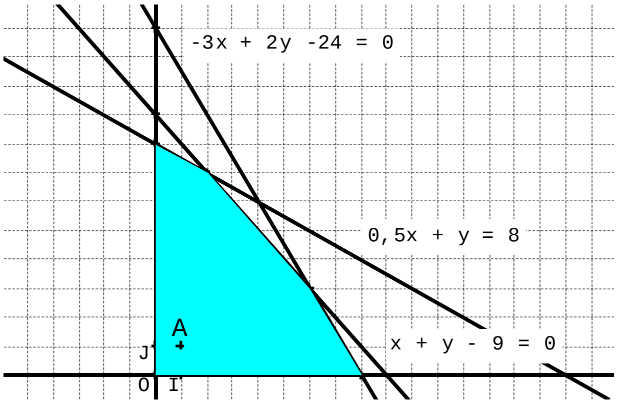
Étude d'un exemple

Un artisan fabrique deux type de jouets en bois *A* et *B*.
- Un jouet *A* nécessite ½ h de travail et 3 kg de bois.
- Un jouet *B* nécessite 1h de travail et 2kg de bois.
- L'artisan dispose de 24kg de bois par jour.
- Il travaille au plus 8h par jour.
- Il ne fabrique pas plus de 10 jouets par jour

Contraintes :

Soient *x* et *y* le *nombre* de jouets *A* et *B* fabriqués par jour

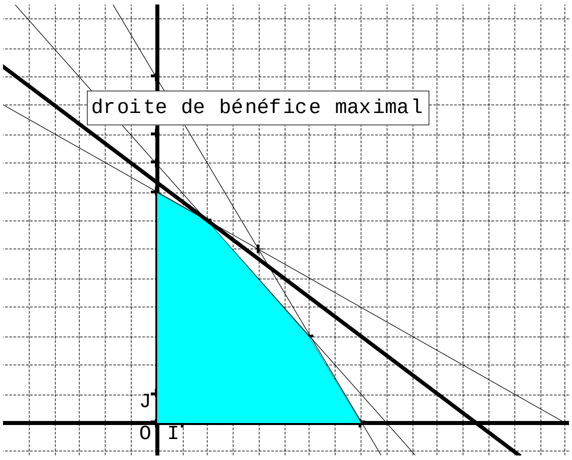
$0{,}5x + y \leq 8$	Il faut ½*h* de travail pour le jouet *A* et 1*h* pour le jouet *B*. L'artisan travaille au plus 8*h* par jour.
$3x + 2y \leq 24$	La masse de bois nécessaire ne peut pas dépasser 24 *kg*.
$x + y \leq 9$	Il ne fabrique pas plus de 9 jouets par jour.
$x \geq 0$; $y \geq 0$	*x* et *y* sont des entiers positifs.



Optimisation (fonction économique) ;

Sachant que l'artisan réalise un bénéfice de 12€ sur un jouet *A* et de 18€ sur un jouet *B*, on demande de déterminer la production quotidienne assurant un bénéfice maximal.

Dans cette situation, le bénéfice quotidien est : $B = 12x + 18y$.



Cette droite coupe la zone des contraintes en un seul point. Par lecture graphique on obtient : **x = 2 et y = 7**
Ainsi en réalisant 2 jouets A et 7 jouets B par jour, l'artisan respecte les contraintes et optimise son bénéfice…

Utilisation du tableur

Le tableur peut être utilisé de la manière suivante :
On place les valeurs de x en ligne et les valeurs de y en colonne. A l'intersection d'une ligne et d'une colonne on place la valeur de la fonction économique à optimiser. Il ne reste plus qu'à trouver la valeur du maximum (ou de minimum) de la plage de données…

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**y/x**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**1**	30	42	54	66	78	90	102			
3	**2**	48	60	72	84	96	108				
4	**3**	66	78	90	102	114	126				
5	**4**	84	96	108	120	132					
6	**5**	102	114	126	138						
7	**6**	120	132	144							
8	**7**	138	150								
9	**8**										
10	**9**										
11	**10**										
12											
13	**MAX**	**150**									

Mise en œuvre :

Astuce : Il est pratique de ***nommer*** « x » la plage de données *(B2 :K2)* et « y » la plage de données *(A2 :A11)*
***Menu** Insertion – Nom dans Excel*

La formule à placer en *B2* est alors :

SI (ET (0,5*x+y<=8 ; 3*x+2*y<=24 ; x+y<=9) ; 12*x+18*y ; " ")

- Cette écriture a de plus l'avantage d'être plus lisible que celle utilisant les références classiques de cellules telles *B1, A2*, etc.
- Cette formule sera recopiée dans la plage *(B2 : K11)*
- La cellule B13 contient la formule MAX(B2 :K11).

Il suffira enfin de rechercher les valeurs de x et de y qui correspondent à ce maximum dans le tableau de valeurs.

Mais…

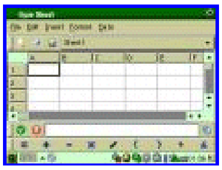
Que se passe-t-il si x et y ne représentent plus des entiers ? Dans l'exemple précédent on pourrait imaginer que x et y représentent un nombre de dizaines voire de centaines d'objets… La méthode précédente n'est plus utilisable, la feuille de calcul risque en effet de devenir énorme. Une approche possible consiste à procéder par *approximations successives* à l'aide d'une feuille de calcul s'inspirant de la précédente. Imaginons par exemple que le système de contraintes soit :

$$\begin{cases} 0,5x+y\leq 800 \\ 3x+2y\leq 240 \\ x+y\leq 900 \end{cases}$$

x et y représentant des centaines d'objets, et que la fonction à maximiser soit : $B=1{,}9x+1{,}266y$ La feuille présentée ci-dessous permet de trouver expérimentalement la solution optimale (sans justification) en faisant varier les valeurs de x et de y avec un pas et des valeurs minimales modifiables.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Départ x	0				x	76												
2	Départ y	0				y	6												
3	Pas	5				FE	152,00												
4	MAX	152,00																	
5																			
6		y/x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
7		0	0	9,5	19	28,5	38	47,5	57	66,5	76	85,5	95	104,5	114	123,5	133	142,5	152
8		5	6,33	15,83	25,33	34,83	44,33	53,83	63,33	72,83	82,33	91,83	101,33	110,83	120,33	129,83	139,33	148,83	
9		10	12,66	22,16	31,66	41,16	50,66	60,16	69,66	79,16	88,66	98,16	107,66	117,16	126,66	136,16	145,66		
10		15	18,99	28,49	37,99	47,49	56,99	66,49	75,99	85,49	94,99	104,49	113,99	123,49	132,99	142,49	151,99		
11		20	25,32	34,82	44,32	53,82	63,32	72,82	82,32	91,82	101,32	110,82	120,32	129,82	139,32	148,82			
12		25	31,65	41,15	50,65	60,15	69,65	79,15	88,65	98,15	107,65	117,15	126,65	136,15	145,65				
13		30	37,98	47,48	56,98	66,48	75,98	85,48	94,98	104,48	113,98	123,48	132,98	142,48	151,98				
14		35	44,31	53,81	63,31	72,81	82,31	91,81	101,31	110,81	120,31	129,81	139,31	148,81					
15		40	50,64	60,14	69,64	79,14	88,64	98,14	107,64	117,14	126,64	136,14	145,64						
16		45	56,97	66,47	75,97	85,47	94,97	104,47	113,97	123,47	132,97	142,47	151,97						
17		50	63,3	72,8	82,3	91,8	101,3	110,8	120,3	129,8	139,3	148,8							
18		55	69,63	79,13	88,63	98,13	107,63	117,13	126,63	136,13	145,63								
19		60	75,96	85,46	94,96	104,46	113,96	123,46	132,96	142,46	151,96								
20		65	82,29	91,79	101,29	110,79	120,29	129,79	139,29	148,79									
21		70	88,62	98,12	107,62	117,12	126,62	136,12	145,62										
22		75	94,95	104,45	113,95	123,45	132,95	142,45	151,95										
23		80	101,28	110,78	120,28	129,78	139,28	148,78											
24		85	107,61	117,11	126,61	136,11	145,61												
25		90	113,94	123,44	132,94	142,44	151,94												
26		95	120,27	129,77	139,27	148,77													
27		100	126,6	136,1	145,6														
28		105	132,93	142,43	151,93														
29		110	139,26	148,76															
30		115	145,59																
31		120	151,92																
32		125																	

Fonctions numériques



Utilisation du tableur

Plusieurs pistes sont possibles dans le cadre d'un TP court.

Tabulation d'une fonction

Construire un tableau de valeurs constitué de 50 valeurs d'une fonction donnée f, sur l'intervalle [a,b].

- Le pas *h* de la table est donné par : $h = \dfrac{b-a}{49}$.
- On pourra montrer à ce propos que nommer une zone « *x* » permet de faciliter et clarifier la saisie de l'expression donnant *f(x)*.
- Le choix du type graphique permet d'aborder cette fonctionnalité du tableur…

La dichotomie

Lorsqu'on sait qu'une fonction continue sur [a,b] s'annule une fois sur cet intervalle, la recherche de la solution peut se faire par dichotomie très efficacement et simplement à l'aide du tableur.
Rappelons le principe de la méthode...

- *On détermine un intervalle [a, b] contenant **une et une seule** solution α de l'équation f(x)=0. f(a) et f(b) sont donc de signes contraires. On appelle c le milieu de l'intervalle,* $c = \dfrac{a+b}{2}$.
- *Si f(a) et f(c) sont de signes contraires alors la racine α est dans l'intervalle [a, c]*
- *Si f(a) et f(c) sont de même signe alors f(c) et f(b) sont de signes contraires donc la racine α est dans l'intervalle [c, b]*

Travaux sur la dérivée

Les activités ne manquent pas…