

Dérivée, logarithme et exponentielle en terminale

(Programme officiel préambule)

Spécialités mercatiques, comptabilité et finance des entreprises, gestion des systèmes d'information :

L'objectif est de résoudre des problèmes mettant en œuvre des fonctions et exploitant si possible des situations issues de l'économie ou de la gestion. Ainsi l'utilisation des exposants non entiers permet de calculer un taux d'évolution moyen et la dérivation permet de calculer un coût marginal.

Pour cela, d'une part on met en place le puissant outil qu'est la fonction dérivée, dont une approche a été faite en classe de première. D'autre part on élargit le champ des fonctions disponibles par l'introduction de la fonction logarithme népérien et des fonctions exponentielles. La présentation du programme privilégie l'introduction de la fonction $\ln$ avant la fonction exponentielle mais le professeur reste libre de l'ordre de l'exposé.

Le tableur et la calculatrice restent des outils privilégiés pour conjecturer ou vérifier des résultats, tant au niveau numérique qu'au niveau graphique. En particulier, la touche $\ln$ de la calculatrice peut permettre de conjecturer l'existence et les propriétés de la fonction logarithme népérien. Cette fonction peut permettre à son tour d'introduire simplement les exposants non entiers et les fonctions exponentielles.

La notion de limite n'est pas au programme.

extrait du programme	extrait du document d'accompagnement	commentaires
Fonction dérivée Définition Connaître les dérivées des fonctions de référence On utilise la dénomination fonction primitive pour désigner la fonction que l'on a dérivée. La recherche de primitive n'est pas au programme Calcul de fonctions dérivées Dériver une somme, un produit, un quotient, une composée de deux fonctions Les théorèmes sont admis. La notation vou n'est pas au programme ; si $f(x)=v(u(x))$ alors $f'(x)=v'(u(x))u'(x)$. la dérivation d'une fonction composée est appliquée aux fonctions $v(ax+b)$ et $(u(x))^n$, ainsi que l'étude des fonction logarithme et exponentielles (voir ci-dessous)	En classe de terminale on donne statut aux formules de calcul du nombre dérivé en définissant la fonction dérivée, et on se donne les moyens de calculer certaines fonctions dérivées. A propos des primitives, il s'agit simplement de disposer d'un mot pour désigner la fonction que l'on a dérivée. On ne soulève aucun problème sur l'existence des primitives d'une fonction donnée, mais on peut faire remarquer que deux fonctions ayant la même dérivée sur un intervalle différent d'une constante. Il est souhaitable pour « donner un visage » à la fonction dérivée, de faire un ou deux exercices où sont comparés le graphe de la fonction dérivée et de la fonction primitive. Les théorèmes sont admis : ils permettront le calcul des dérivées des fonctions usuelles, essentiellement les fonctions polynômes et rationnelles, auxquelles s'adjoindront les fonctions logarithme et exponentielles . La notation vou n'est pas exigible. On peut utiliser l'expression « composée de u suivie de v » et énoncer : si $f(x)=v(u(x))$ alors $f'(x)=v'(u(x))u'(x)$. Ce théorème de dérivation de fonction composée s'appliquera à diverses familles de fonction tout au long de l'année : $x \rightarrow \ln(ax) - \ln(x)$ pour démontrer que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $x \rightarrow \ln(ax+b)$ $x \rightarrow \ln(\exp(x))$ pour découvrir la dérivée de la fonction exp $x \rightarrow \exp(ax+b)$ $x \rightarrow a^x$, via l'écriture $e^{x \ln(a)}$	En BTS comptabilité gestion ou informatique de gestion le calcul des primitives est au programme (1^{er} année en général) (tout comme les limites d'ailleurs...) Une question en découle : les programmes de mathématiques des BTS IG et CG semblent devoir être revus pour intégrer les nouveaux aspects du programme de terminale : absence des limites, intégrales, moindre dextérité calculatoire sur la dérivation. <i>semble ambitieux...</i> L'utilisation du théorème de fonction composée combinée avec l'introduction du logarithme ou de l'exponentielle afin d'en démontrer quelques propriétés combine trois difficultés : la fonction dérivée, la composition, l'introduction d'une nouvelle fonction...

Application à l'étude des variations Déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa fonction dérivée Le théorème est admis mais expliqué graphiquement. L'objectif est notamment la résolution de problèmes d'optimisation à une variable. Déterminer un extremum	Le théorème associant le signe du nombre dérivé au sens de variation de la fonction primitive a été vu en première. En terminale on énonce le théorème réciproque, toujours à l'aide d'une justification graphique. Ce théorème ramène l'étude du sens de variation à une étude de signe, il faut : -d'une part qu'ils aient compris ce qu'est le sens de variation d'une fonction, qu'ils le distinguent de son signe, et qu'ils voient l'utilité de l'étudier ; - d'autre part qu'ils soient plus performants dans l'étude du signe que dans l'étude directe d'un sens de variation. En principe le travail fait en première a permis de franchir ces deux étapes	La question de la progression en terminale semble centrale afin que l'assimilation des « techniques » de dérivation puisse se faire correctement. Cependant il semble difficile d'attendre la même dextérité calculatoire qu'auparavant, ce qui a des conséquences pour les futurs sujets de BAC et aussi dans le post BAC...
Fonction logarithme népérien. Définition par $\ln(1)=0$ et $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. Dériver la fonction $\ln$. Les autres fonctions logarithmes ne sont pas au programme. L'existence et l'unicité de la fonction $\ln$ sont admises. Elles sont suggérées par la touche $\ln$ de la calculatrice. Sens de variation, signe, graphe Savoir que $\ln(a)$ et $\ln(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b ; que $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$. Transformation de produits en sommes Utiliser l'identité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et ses conséquences : $\ln\left(\frac{a}{b}\right), \ln(a^n), \ln(\sqrt{a})$ On peut démontrer d'abord que pour $a>0$, la fonction $x \mapsto \ln(ax) - \ln(x)$ est constante sur $]0;+\infty[$ Application : transformer une suite géométrique en suite arithmétique. Fonctions : $x \mapsto \ln(u(x))$ Dériver : $x \mapsto \ln(u(x))$. Le sens de variation est celui de u.	La définition peut être introduite à partir du problème historique auquel se sont attelés au 16^e siècle des hommes comme Chuquet, Stifel, Neper, Briggs, Bürgi, pour les besoins de l'astronomie et de la navigation : simplifier les calculs en remplaçant les multiplications par des additions (et donc les divisions par des soustractions, les élévations de puissances par des multiplications, les extractions de racines par des divisions simples). Cela revient à rechercher une fonction f telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tous nombres réels strictement positifs a et b. Une telle fonction doit vérifier : - d'une part $f(1) = 0$, puisque $f(1) = f(1) + f(1)$; - d'autre part, $f(ax) = f(a) + f(x)$ d'où en supposant f dérivable : $a f'(ax) = f'(x)$ donc $a f'(a) = f'(1)$, soit $f'(x) = \frac{k}{x}$ en posant $k = f'(1)$. La définition retenue consiste à choisir la plus simple des fonctions possibles : celle pour laquelle $k = 1$. On admet qu'il en existe une, définie sur $]0;+\infty[$. L'avantage de cette définition est qu'elle permet de démontrer facilement les propriétés utiles, qu'elles soient algébriques ou analytiques. Un usage ancien consiste à noter $\ln x$ le logarithme népérien de x : on lui préférera la notation $\ln(x)$, notation standard pour l'image d'un nombre par une fonction, qui est utilisée par les calculatrices et les ordinateurs, et qui évite certaines erreurs. Dans le même ordre d'idées, il faut rappeler que si u désigne une fonction, l'écriture $\ln u$ désigne en principe le produit de $\ln$ par u et non la composée, qui se note $\ln \circ u$. Cette dernière écriture n'est pas exigible en STG ; on peut énoncer par exemple : si $f(x) = \ln(u(x))$ Alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Notons au passage qu'il n'est pas exigible de savoir dériver une fonction de la forme $x \mapsto \ln(u(x))$.	Introduction de la fonction $x \mapsto \ln x$ clairement indiquée (activité dans le doc. d'accompagnement) Sous-entend que les démonstrations des propriétés du cours doivent être faites. Nouveau : précision très nette au niveau des notations Les élèves doivent-ils savoir calculer les mêmes dérivées qu'auparavant (filière CG/IG) ? Ou doit-on se contenter de calculs plus simples, en sachant qu'ils doivent assimiler la même année : dérivées, fonction logarithme et exponentielle ? (exemple de fonction traitée au baccalauréat qui nous semblent maintenant « assez difficiles » : $x \mapsto -\frac{\ln x}{x} + x - 1$)

Fonctions exponentielles :

Fonction $x \mapsto e^x$, notée exp :
Signe, dérivée, sens de variation, graphe.

Savoir que $\exp' = \exp$.
Cela résulte de l'identité $\ln(\exp(x)) = x$, en admettant l'existence de $\exp'$.
Dériver $x \mapsto e^{u(x)}$

Fonctions $x \mapsto a^x$

Ecrire a^x sous la forme $e^{x \ln(a)}$.
Cela ramène l'étude à celle de la fonction exp.
Les fonctions exponentielles interpolent les suites géométriques.

On veillera à faire le lien entre la fonction $x \mapsto a^x$ et la suite $n \mapsto a^n$.
Les fonctions exponentielles fournissent un modèle continu là où les suites géométriques fournissent un modèle discret. On parle indifféremment de croissance (décroissance) exponentielle ou de croissance (décroissance) géométrique.
On aurait pu d'ailleurs introduire les fonctions exponentielles par cette entrée. Cela revient à chercher les fonctions qui transforment les sommes en produits, et donc une suite arithmétique en suite géométrique.
On peut alors entre a^n et a^{n+1} intercaler leur moyenne géométrique, qui doit être l'image de $n + 0,5$. En itérant le procédé, on peut introduire a^x pour des valeurs non entières de x .

La fonction exponentielle est introduite comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Le dérivée s'obtient à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

On retrouve le même problème qu'avec les fonctions logarithmes où le calcul de dérivées est délicat.
Exemples :
 $x \mapsto 3 + (x - 1)e^{-x}$
 $x \mapsto \frac{x - 2}{e^x} + 2$

Le lien est à effectuer entre la fonction exponentielle et les suites géométriques