LES GRANDEURS ET LEURS MESURES

Les grandeurs ont joué jusqu'à l'époque des mathématiques modernes un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques et le calcul. Elles ont alors disparu (on a alors oublié les grandeurs pour se situer directement dans le champ des nombres) puis ont été réintroduites. Leur place dans les nouveaux programmes est plus importante.

Il y a beaucoup d'intérêt à enseigner la notion de grandeur. La géométrie, qui est une théorie physique de l'espace, se prête à des calculs sur certaines grandeurs : longueur, aire, volume, angle. Les phénomènes physiques s'y prêtent constamment. Une grande partie des mathématiques élémentaires a été construite en réponse à des problèmes posés par le réel. Ainsi les grandeurs deviennent des objets familiers qui vont constituer un support concret pour effectuer des opérations sur les nombres.

Les grandeurs existent d'abord indépendamment des nombres, elles rejoignent ces nombres par l'intermédiaire de la notion de mesure. Les grandeurs sont proches des perceptions et manipulations quotidiennes, alors que les nombres seuls sont déjà loin des choses.

La plupart de ces manipulations quotidiennes sur les grandeurs sont faciles (comparaisons de masses, de volumes…..) mais au 21ème siècle, le citoyen est entouré d'appareils qui travaillent à sa place (balances à affichage digital, qui donnent directement le prix….), on ne manipule plus, on est directement dans le champ des nombres. Ainsi, plus on utilise de mesures, moins on en fait, on a beaucoup perdu avec les pesées sur une balance, suivies du calcul du prix.

C'est à travers des problèmes de mesure de grandeurs que les élèves peuvent ressentir le besoin mathématique d'extension du champ des nombres positifs, des entiers aux rationnels, décimaux et réels, alors que chez le physicien, la mesure des grandeurs amène seulement l'élève vers les décimaux « limités ».

1. Dans le programme de 6ème :

Le nouveau programme est partagé en quatre domaines :

- Organisation et gestion de données
- Nombres et calculs
- Géométrie
- Grandeurs et mesure

Dans le dernier domaine, les objectifs généraux sont les suivants :

- Se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aire, volumes, durées) ;
- Connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;
- Calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées et avec les unités de quelque grandeurs quotients et grandeurs produits.

En ce qui concerne la classe de sixième, on demande généralement :

- De compléter les connaissances relatives aux longueurs, aux masses et aux durées.
- De consolider la notion d'angle, à partir des premières expériences de l'école primaire.
- D'assurer la maîtrise de la notion d'aire(distinguée de celle de périmètre) et celle du système d'unités de mesure des aires ;
- De mettre en place la notion de volume et commencer l'étude du système d'unités de mesure des volumes.

Les compétences attendues sont :

- ❑ Changements d'unités de mesure : l'utilisation d'un tableau n'est pas conseillée.
- ❑ Comparaison de périmètres, d'aires, d'angles
- ❑ Calculer des périmètres dont celui du cercle. Déterminer l'aire d'une surface à partie d'un pavage.
- ❑ Généraliser l'aire du rectangle aux dimensions décimales. Aire du triangle rectangle.
- ❑ Différencier aire et périmètre.
- ❑ Volume par dénombrement : mettre en œuvre des images mentales (comme les mille cm^3 dans un dm^3)
- ❑ Correspondance entre contenance et volume.
- ❑ Usage du rapporteur
- ❑ Entretenir les calculs avec les nombres décimaux.
- ❑ Premier répertoire de formules.
- ❑ Calculer des durées, des horaires.

2. Les grandeurs avant leurs mesures, la construction du sens :

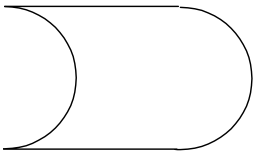
Nous avons vu dans l'exposé précédent que les grandeurs mesurables additives peuvent être comparées, ajoutées, multipliées et divisées par un réel positif.

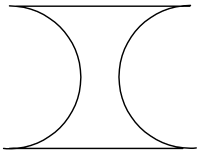
Voici des phrases d'un type courant qui parlent de grandeurs mesurables :

« Les arêtes d'un cube ont même longueur »
« Sur les routes, la vitesse est limitée »
« Cette valise n'a pas un assez grand volume pour y placer toutes mes affaires »

Il est possible d'associer diverses grandeurs à un objet, par exemple pour un objet cubique, une contenance ou un volume, une masse, des aires et de longueurs. Le fait d'annoncer la bonne unité de mesure n'est pas suffisant pour que l'élève se représente correctement une grandeur.
Les premières activités visent donc à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne.
Ainsi, dès le début et au cours des différentes années de l'école primaire, l'élève apprend à comparer, à ajouter deux grandeurs, à multiplier une grandeur par un entier et à diviser cette grandeur en plusieurs parts égales, et à enchaîner les opérations : ces opérations sur des grandeurs sans mesure préparent le calcul fractionnaire.

Exemple :comparer les périmètres et les aires des figures ci-dessous





- Autres exemples : voir feuille activité en annexe.
- En 6ème, utilisation de découpages et de recomposition pour les aires, comptages de carreaux…
- Volumes : combien de cubes de 1 cm d'arête dans des pavés de dimensions données : fabrication de ces pavés par travail en groupes, puis comptage et remplissage d'un tableau.

Les aires de figures « composées de surfaces » s'ajoutent ou se soustraient, mais pas les périmètres correspondants, ce qui n'est pas toujours clair pour nos élèves qui ont tendance à ajouter aussi les périmètres dans ces situations.

3. Des grandeurs à leur mesure :

Au collège et à l'école, on aborde plus particulièrement les longueurs, les aires, les volumes, les angles, les masses, les durées, les prix et aussi des grandeurs quotients comme les vitesses, les débits et les prix par unité de masse.
Au départ, on travaille sur des objets (allongés, pesants,….) puis ces objets sont remplacés par des représentants (schéma, segment, rectangle,…) . On construit alors la notion de mesure par report d'unités et de sous-unités pas forcément conventionnelles pour arriver mesurer dans les systèmes d'unités conventionnelles.
Une grandeur n'est pas un nombre : 5 ne désigne pas une grandeur, mais 5 cm est la classe d'équivalence de tous les segments de longueur égale à 5 fois 1 cm.
Dans l'ensemble de grandeurs de même nature, on définit une loi de composition interne(5 kg + 2 g = 5002 g) et une multiplication par un nombre,externe (5×20 s = 100s)
Cette multiplication externe ne doit pas être confondue avec les grandeurs produits comme les aires, les volumes, les kwh……($7\text{m} \times 3\text{m} = 21\text{m}^2$….)
On peur ajouter à ces opérations les grandeurs quotients et la division d'une grandeur par une autre de la même nature, division dont le résultat est un nombre sans unité.

Il est souhaitable que l'élève apprenne à estimer la mesure avant de procéder au mesurage ou au calcul (voir estimations d'angles, de volumes…)
Attention au sens des préfixes kilo, hecto….. qui n'est plus le même pour les unités d'aires et de volumes.

Les confusions entre grandeur et mesure sont fréquentes : l'écriture des calculs sur les grandeurs invite à confondre grandeur et nombre. Il est donc essentiel que l'élève distingue 3cm + 5cm = 8cm de 3 + 5 = 8 et, surtout, qu'il n'écrive pas 3 + 5 = 8cm

4. Pourquoi omettre les unités dans les calculs sur les grandeurs :

- On effectue les calculs sans unité, on écrit l'unité dans la phrase accompagnatrice (danger : 12 + 3 = 15 kg…)
- Eviter des lourdeurs .

- ❑ Rapidité de rédaction.

5. Pourquoi mettre les unités dans les calculs sur les grandeurs :

D'abord, amener les élèves à bien saisir la distinction entre grandeurs et nombres, redonner du sens à l'écriture de certains calculs et contribuer, par exemple, à atténuer la confusion entre aire et périmètre (3 cm × 4 n'a pas le même sens que 3 cm × 4 cm). Dans les documents d'accompagnement des programmes du cycle 3, on conseille l'écriture des unités dans les calculs. Ceci est, d'autre part, d'usage courant dans certains pays européens (Espagne, Grande Bretagne).

Des exemples d'application :
- Pour l'aire du rectangle : 3 cm × 4 cm = 12 cm²
- Pour le périmètre d'un polygone : 1,5 cm + 21 mm + 0,5dm + 3 cm = 1,5 cm + 2,1 cm + 3 cm + 5 cm = 11,6 cm
- Pour le volume d'un prisme : 12 m² × 30 cm = 12m² × 0,3 m = 3,6m^3
- Pour le calcul de la vitesse d'un mobile qui a parcouru 40 km en 2h 30 min :

$$\frac{40\text{ km}}{2\text{h}+30\text{min}} = \frac{40\text{km}}{2{,}5\text{h}} = 16\text{km/h} \quad \text{ou} \quad \frac{40\text{ km}}{2\text{h}+30\text{min}} = \frac{40\text{km}}{150\text{min}} = \frac{4\text{km}}{15\text{ min}} = \frac{16\text{km}}{60\text{ min}} = \frac{16\text{km}}{1\text{h}} = 16\text{km/h}$$

En ce qui concerne la proportionnalité, le opérateurs en jeu ont des sens tout à fait différents.

Les coefficients 5 et 3 sont des **opérateurs scalaires, des nombres sans unités.**
Le coefficient 4,2 prend du sens si on écrit 4,2 €/m.

On pourra alors écrire 3 m × 4,2 €/m = 12,6 €

× 4,2

	Longueur d'étoffe en m	Prix à payer en euros
	5	21
: 5	1	??
× 3	3	??

En écrivant les unités, on donne du sens aux formules : dans πR²h, R² est une aire, on le multiplie par h qui est une longueur, c'est donc un volume.

Pour les conversions, cet usage peut être bénéfique

$$\frac{90\ km}{1\ h} = \frac{90000\,m}{3600\,s} = 25m/s$$

6. Calculs sur les durées :

Les techniques automatisées (calcul posé en colonnes) pour les additions et soustractions de durées n'ont pas à être étudiées. Un calcul réfléchi est aussi rapide et souvent plus efficace.

Exemple (lié à un problème) : 9h 15 min – 5h 47 min

$$5\text{h } 47\text{min} \xrightarrow{\boxed{13\text{ min}}} 6\text{h} \xrightarrow{\boxed{3\text{ h}}} 9\text{h} \xrightarrow{\boxed{15\text{ min}}} 9\text{h } 15\text{min}$$ soit 3h 28 min

Remarque : on peut aussi proposer 8h 75 – 5h 47, mais c'est plus artificiel.
Ou : de 5h15 à 9h 15, il y a 4 h, il y a donc 32 min de moins, soit 3h 28 min.

Ce genre de calculs est à reprendre régulièrement dans les séances de calcul mental.

7. Commentaires des activités qui peuvent être proposées aux stagiaires :

Activité 1 : elle vise à donner du sens aux notions d'aire, de volume et de périmètre, à travers des mesures, des représentations d'objets et des textes évoquant des situations de la vie quotidienne.

Activité 2 : Comme le titre l'indique, on compare sans avoir recours aux mesures. Il est intéressant de demander aux élèves de s'exprimer par écrit, de justifier leurs comparaisons. Pour les deux dernières figures, le périmètre peut être calculé, ce qui n'est pas le cas de l'aire, ce qui montre une différence de « fonctionnement » entre les deux notions, alors que beaucoup d'élèves pensent que ces deux notions ont le même comportement.

Activité 3: Elle vise à donner du sens au cm^2, qui pourra être considéré comme $100mm^2$ par comptage des carreaux.

Activité 4: Elle vise aussi à donner du sens au cm^2, un autre objectif étant de considérer l'aire d'une figure composée par addition et soustraction d'aires de figures simples.

Activité 5 : De la comparaison à l'estimation puis à la mesure des angles. Un prolongement peut être fait avec l'utilisation d'un logiciel de géométrie : le professeur dessine un angle à l'aide de ce logiciel, demande aux élèves d'estimer sa mesure, classe rapidement les résultats, donne une fourchette d'estimations puis demande au logiciel de donner le verdict. Après plusieurs essais, les estimations gagnent en précision et amènent l'élève à être davantage critique sur son utilisation du rapporteur.

Bibliographie :

« Faut-il mettre des unités dans les calculs ? » de Rémi Duvert, bulletin APMEP 436
Document d'accompagnement des programmes de l'école primaire : grandeurs et mesure
Brochure APMEP Mots Tome 6 : Grandeur-Mesure
Ressources pour le programme de sixième, IREM de Strasbourg, 2002
Rapport d'étape sur le calcul :Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques.
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans (CREM, centre de recherche belge sur l'enseignement des mathématiques)