MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE STRASBOURG
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Sujet académique

Strasbourg – Zone Europe Centrale et Occidentale

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les énoncés et les copies sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter **les exercices académiques 1 et 2**.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter **les exercices académiques 1 et 3**.

Le sujet est prévu pour être cherché en équipe de 2 à 4 candidats. Cependant, **une seule copie** pour l'ensemble du groupe est remise à l'issue des deux heures de composition.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur leur copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent leur composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisés selon la réglementation en vigueur.

L'énoncé académique comporte 8 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

Écriture en base 7

Les nombres que nous utilisons dans la vie courante sont écrits en base 10, correspondant au nombre de doigts des deux mains. Lorsque nous comptons nous décomposons les nombres entiers naturels suivant les puissances de 10.

Par exemple : $2356 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$.

Le système septénaire consiste à compter en base 7.
Écrire un nombre entier naturel en base 7 consiste à décomposer ce nombre suivant les puissances de 7. Un nombre entier N s'écrit en base 7 : $\overline{a_p a_{p-1} \dots a_0}^7$ où les a_i sont des entiers naturels strictement inférieurs à 7 et sont appelés les chiffres de N en base 7.

Partie A : Conversion en base 10

La valeur en base 10 d'un nombre écrit en base 7 est :
$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}^7 = a_n \times 7^n + a_{n-1} \times 7^{n-1} + \cdots + a_1 \times 7^1 + a_0 \times 7^0$
Par exemple $\overline{324}^7$ est un nombre à trois chiffres écrit en base 7 et sa conversion en base 10 se calcule de la manière suivante :
$\overline{324}^7 = 3 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 4 \times 7^0 = 3 \times 7^2 + 2 \times 7 + 4 = 165$.

1. Donner la valeur en base 10 de $\overline{5624}^7$ et $\overline{36214}^7$.

2. Quelle est la valeur en base 10 du plus grand nombre à quatre chiffres en base 7 ?

Partie B : Opérations en base 7

1. Sans passer par la base 10, donner le nombre qui précède $\overline{120}^7$ et celui qui suit $\overline{366}^7$.

2. Addition en base 7.
Voici un exemple d'addition posée en base 7 :

$$\begin{array}{rrrr} & 3_1 & 2_1 & 5 \\ + & 1 & 6 & 2 \\ \hline & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

a. Justifier les deux retenues situées à côté des chiffres 3 et 2.
b. Calculer $\overline{434}^7 + \overline{364}^7$.

3. Soustraction en base 7.
Voici un exemple de soustraction posée en base 7 :

$$\begin{array}{rrrr} & 5 & 2_1 & 6 \\ - & 3_1 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

a. Justifier les deux retenues situées à côté des chiffres 2 et 3.
b. Calculer $\overline{421}^7 - \overline{264}^7$.

4. Multiplication en base 7.

a. On a le résultat : $\overline{23}^7 \times \overline{13}^7 = \overline{332}^7$. Justifier ce résultat à l'aide d'une multiplication posée.
b. Calculer $\overline{2506}^7 \times \overline{35}^7$.

Partie C : Quelques problèmes

1. Convertir le nombre 2025 en base 7.

2. Sur la planète Azimuth, on a $\overline{435}^b + \overline{242}^b = \overline{1121}^b$.

   a. Les Azimuthiens ont-ils 7 doigts ? Justifier.

   b. Combien les Azimuthiens ont-ils de doigts ?

3. Déterminer la valeur du chiffre x tel que $\overline{3x4}^7$ soit un multiple de 6.

4. Combien y a-t-il de nombres entiers compris entre $\overline{4233}^7$ et $\overline{551024}^7$?

5. Déterminer l'ensemble des nombres entiers x écrits en base 7 tels que :

$$\overline{336}^7 \leq \overline{12}^7 x - \overline{45}^7 \leq \overline{444}^7.$$

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Somme de deux dés

On considère deux dés à six faces auxquels on associe les lois de probabilités suivantes :

Premier dé :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Deuxième dé :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6

On s'intéresse à l'expérience aléatoire (E), lors de laquelle on lance ces deux dés puis on additionne les résultats obtenus. Par exemple, si le lancer du premier dé donne 3 et que le lancer du second donne 5, la somme considérée vaut 8.

Pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq 12$, on note s_i la probabilité que la somme des deux valeurs obtenues en lançant les dés soit égale à i.

Le tableau suivant sera appelé loi de probabilité de la somme des deux dés :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}

Le but du problème est de trouver les lois de probabilités des deux dés qui rapprochent le plus possible la répartition des probabilités des sommes d'une répartition uniforme, correspondant à l'équiprobabilité des 11 sommes. Pour cela, on cherchera à minimiser la valeur notée D, définie par :

$$D = \sum_{j=2}^{12} \left(s_j - \frac{1}{11}\right)^2 = \left(s_2 - \frac{1}{11}\right)^2 + \left(s_3 - \frac{1}{11}\right)^2 + \cdots + \left(s_{12} - \frac{1}{11}\right)^2$$

Partie A : Comparaison de deux cas particuliers

1. **Situation 1 :**
   Dans cette question, on suppose que les deux dés sont équilibrés.
   a. Démontrer que $s_{11} = \frac{2}{36}$.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la somme de ces deux dés.
   c. Calculer la valeur de D pour ces deux dés.
2. **Situation 2 :**
   Dans cette question, on suppose que le premier dé est équilibré, mais que l'on a truqué le deuxième dé de telle sorte que $q_1 = q_6 = \frac{1}{2}$.
   a. Démontrer que $s_{11} = \frac{1}{12}$.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la somme de ces deux dés.
   c. Calculer la valeur de D pour ces deux dés.
3. Pour laquelle des deux situations précédentes se rapproche-t-on le plus de l'équiprobabilité des 11 sommes ?

Dans les parties B, C, D on étudie le cas général.

Partie B : une répartition uniforme est-elle possible ?

1. Démontrer que $s_7 \geq p_1q_6 + p_6q_1$.
2. Développer et réduire $\left(\sqrt{p_1q_6} - \sqrt{p_6q_1}\right)^2$.
3. En déduire que $s_7 \geq 2\sqrt{s_2s_{12}}$.
4. Dans l'expérience aléatoire (E), les probabilités de toutes les sommes peuvent-elles être égales ?

Partie C : un peu d'algèbre

1. Démontrer que :

$$D = \sum_{j=2}^{12} {s_j}^2 - \frac{1}{11} = s_2^2 + s_3^2 + \cdots + s_{12}^2 - \frac{1}{11}$$

2. **a.** Démontrer que :

$$\begin{aligned} &8(s_2^2 + s_7^2 + s_{12}^2) - 3(s_2 + s_7 + s_{12})^2 \\ &\quad = 2(s_7^2 - 4s_2s_{12}) + (s_7 - s_2 - s_{12})^2 + (s_7 - 2s_2)^2 + (s_7 - 2s_{12})^2 \end{aligned}$$

b. En déduire que :

$$s_2^2 + s_7^2 + s_{12}^2 \geq \frac{3}{8}(s_2 + s_7 + s_{12})^2$$

3. Soient a, b, c, d, e, f, g, h huit nombres réels quelconques. Démontrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \geq \frac{(a + b + c + d + e + f + g + h)^2}{8}$$

Partie D : s'approcher d'une répartition uniforme

Les résultats de la partie C peuvent être utilisés dans la partie D.

Soit $r = s_2 + s_7 + s_{12}$ et soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{(1-x)^2}{8}$.

1. Démontrer que :

$$\sum_{j=2}^{12} {s_j}^2 \geq f(r)$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
3. En déduire que $D \geq \frac{1}{352}$.
4. Démontrer que $D = \frac{1}{352}$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{c} s_7 = 2s_2 \\ s_{12} = s_2 \\ s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_8 = s_9 = s_{10} = s_{11} = \dfrac{3}{2}s_2 \end{array} \right\}$$

5. Déterminer une loi de probabilité pour chacun des deux dés de telle sorte que $D = \frac{1}{352}$.

Exercice 3
(candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

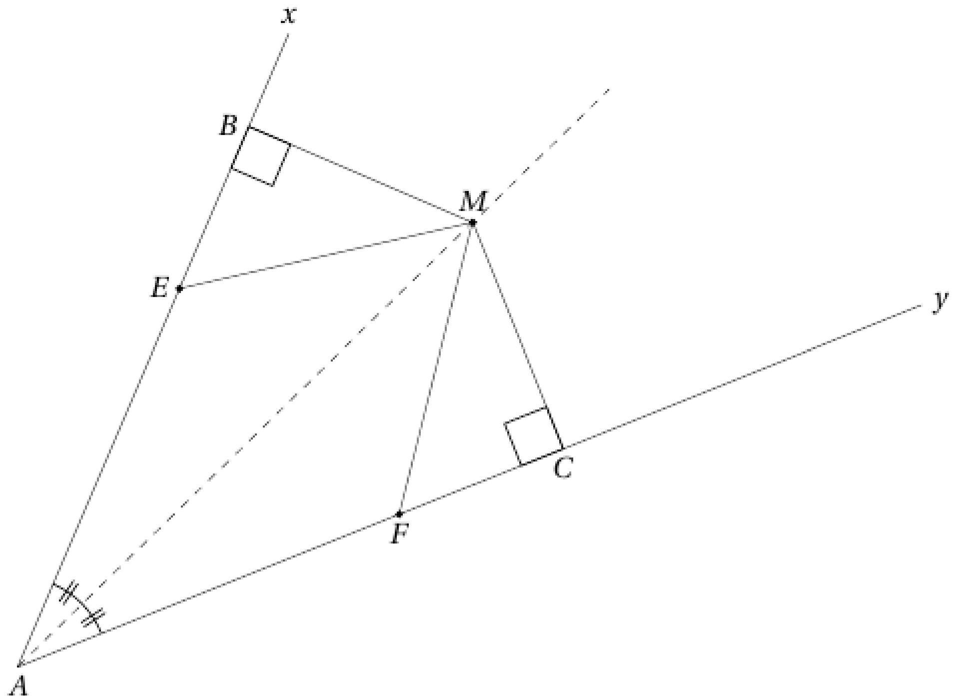
Triangle de Maxwell

Partie A : Construction de la bissectrice d'un angle

On définit la bissectrice d'un angle $\widehat{yAx}$ de mesure comprise entre 0° et 180° comme étant la demi-droite qui le partage en deux angles de même mesure.

Soit M un point de la bissectrice.
On construit :

- le triangle AMB rectangle en B avec B appartenant à $[Ax)$;
- le triangle AMC rectangle en C avec C appartenant à $[Ay)$;
- deux points E et F appartenant respectivement à $[Ax)$ et à $[Ay)$, tels que $AE = AF$.



1. Montrer que les deux triangles AMB et AMC sont semblables.

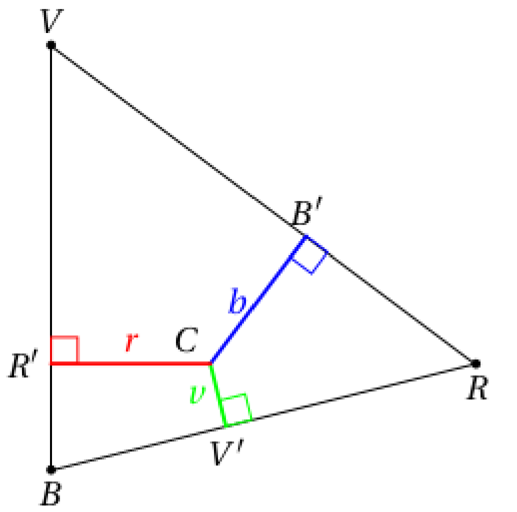
2. En déduire que $MB = MC$ et que $ME = MF$.

3. Trouver une construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle, et réaliser cette construction sur l'**annexe 1**. On laissera les traces de construction.

Pour les parties B et C, on considèrera un triangle RVB et C un point dans ce triangle.

On note respectivement r, v, b les longueurs des segments $[CR']$, $[CV']$, $[CB']$.

(r, v, b) sont les composantes d'une couleur C.



Partie B : Triangle isocèle rectangle

Dans cette partie le triangle RVB est isocèle rectangle en B, avec $BR = 5cm$.

1. On considère les deux points E et F représentant les couleurs $(1, 2, b_E)$ et $(1, v_F, 1)$.

- **a.** Faire une figure et placer les points E et F. On justifiera la construction, notamment en laissant les traits de construction.
- **b.** Déterminer la valeur de v_F.
- **c.** Déterminer les aires des triangles BEV, BER et BRV.
- **d.** En déduire l'aire de REV et la valeur de b_E.

2. La somme $r + v + b$ est-elle constante pour n'importe quel point à l'intérieur de RVB ?

Partie C : Triangle équilatéral

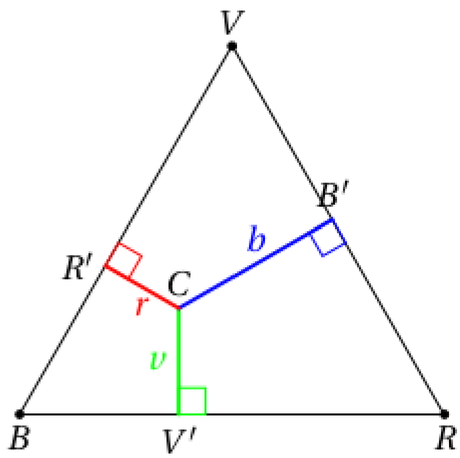
Dans cette partie le triangle RVB est équilatéral de coté $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

1. En utilisant le principe de la question 1 de la partie B, montrer que $r + v + b = 1$.

2. Où se situe le point ayant les 3 composantes de même valeur ?

3. Faire un schéma sur la copie pour représenter l'ensemble de tous les points dont la composante rouge vaut 0,2.

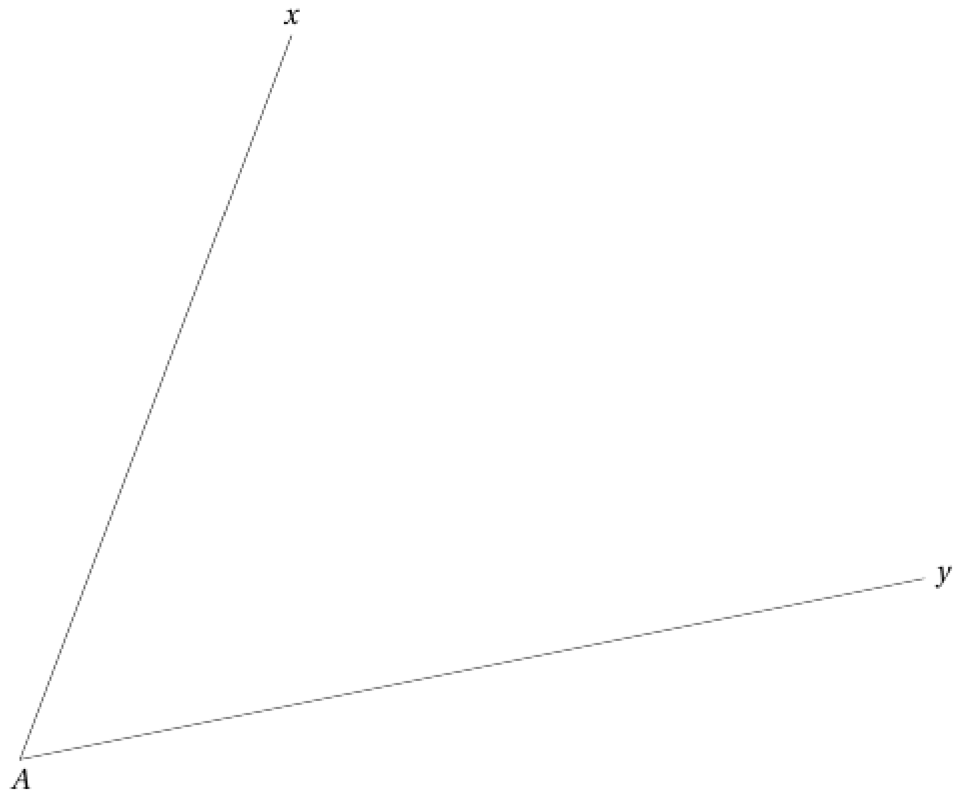
4. On définit la zone rouge comme l'ensemble des points dont la composante rouge est plus grande que chacune des deux autres composantes bleue et verte. De manière analogue on définit les zones bleue et verte.



Dessiner les trois zones avec les couleurs correspondantes sur la figure de l'**annexe 2**. Justifier.

ANNEXES DE L'EXERCICE 3 – À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe 1



Annexe 2