MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Sujet académique

Strasbourg – Zone Europe Centrale et Occidentale

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter **les exercices académiques 1 et 2**.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter **les exercices académiques 1 et 3**.

Le sujet est prévu pour être cherché en équipe de 2 à 4 candidats. Cependant, **une seule copie** pour l'ensemble du groupe est remise à l'issue des deux heures de composition.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur leur copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent leur composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisés selon la réglementation en vigueur.

L'énoncé académique comporte 10 *pages.*

Exercice 1 (tous les candidats)

Distance entre des mots

Le but de l'exercice est d'étudier, puis de comparer différentes manières de calculer la distance entre deux mots. La première partie est une introduction au sujet, dont le vocabulaire sera utilisé dans le reste du sujet. Les deux parties B et C peuvent être traitées de manière indépendante. La partie D utilise des résultats des parties précédentes.

Partie A : Introduction

Définition :
Pour tout entier n strictement positif, on appelle $\mathcal{W}_n$ l'ensemble des mots de $2n$ lettres composés de n lettres A et n lettres B. Ainsi, par exemple, $\mathcal{W}_1$ est l'ensemble des mots de deux lettres composés d'une lettre A et d'une lettre B :

$$\mathcal{W}_1 = \{AB, BA\}$$

1. Écrire $\mathcal{W}_2$, l'ensemble de tous les mots de 4 lettres composés de 2 lettres A et 2 lettres B.
2. Combien y a-t-il de mots dans $\mathcal{W}_3$? Justifier.

Définition :
Pour tout entier n strictement positif, et tout entier i tel que $1 \leq i \leq 2n$, on note $w[i]$ la i-ème lettre d'un mot $w \in \mathcal{W}_n$. Ainsi, par exemple, si $w = AB$, alors $w[1] = A$ et $w[2] = B$.

3. De manière analogue à l'exemple précédent, si $w = ABBA$, donner alors $w[3]$.

Partie B : Distance de swap

Définition :
À partir d'un mot, on peut en obtenir d'autres en réalisant des **swaps** (ou **transpositions élémentaires**). Un **swap** est un échange de deux lettres voisines dans un mot.

Par exemple, en échangeant les deux premières lettres, on peut transformer $ABABAB$ en $BAABAB$. Puis en échangeant les deux dernières lettres, on obtient $BAABBA$. On dit qu'il faut deux **swaps** pour transformer $ABABAB$ en $BAABBA$. On peut schématiser l'exemple précédent :

$$ABABAB \longmapsto BAABAB \longmapsto BAABBA$$

1. Quel(s) mot(s) peut-on obtenir en faisant un swap dans le mot $AABB$?

Définition.
Pour tout entier n strictement positif. La « distance de swap » entre deux mots $v \in \mathcal{W}_n$ et $w \in \mathcal{W}_n$, notée $d_{swap}(v, w)$, est le nombre minimal de swap à effectuer pour transformer v en w. C'est donc un nombre entier naturel. Par exemple, $d_{swap}(ABABAB, BAABBA) = 2$.

2. **(a)** Décrire une manière de transformer $AABB$ en $BBAA$.
   (b) Démontrer que $d_{swap}(AABB, BBAA) = 4$.

3. Soit n un entier strictement positif, et soient $u \in \mathcal{W}_n$, $v \in \mathcal{W}_n$ et $w \in \mathcal{W}_n$.

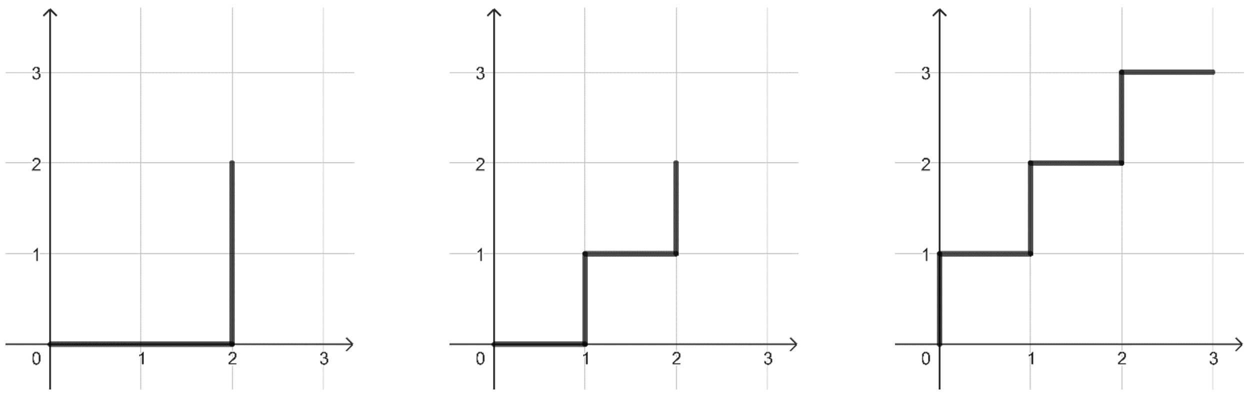
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur v et w pour que $d_{swap}(v, w) = 0$. Justifier.
   (b) A-t-on $d_{swap}(v, w) = d_{swap}(w, v)$? Justifier.
   (c) Démontrer que $d_{swap}(u, v) \leq d_{swap}(u, w) + d_{swap}(w, v)$.

Partie C : Représentation graphique d'un mot, et une autre distance

Soit n un entier naturel. Pour représenter graphiquement un mot de $\mathcal{W}_n$ dans un repère orthonormé, on construit un chemin partant de l'origine $(0\,;0)$, arrivant en $(n\,;n)$ et composé de n représentants du vecteur de coordonnées $\binom{1}{0}$ et n représentants du vecteur de coordonnées $\binom{0}{1}$ mis bouts à bouts.

Comme le sens des vecteurs ne change pas dans cette représentation, on représentera uniquement des segments. Chaque segment horizontal de longueur 1 représente un A, et chaque segment vertical de longueur 1 représente un B. On dessine ces segments dans l'ordre d'apparition des lettres dans le mot. Par exemple, si la première lettre du mot est un A, on construit un segment horizontal de longueur 1 partant de l'origine.

À titres d'exemples, nous avons représenté ci-dessous les mots $AABB$, $ABAB$ et $BABABA$:



1. Représenter $AABBBAABAB$ sur votre copie.

Définition.
Soit n un entier strictement positif, $w \in \mathcal{W}_n$, et j un entier tel que $1 \leq j \leq 2n$.
On appelle $w_A(j)$ le nombre de lettres A dans les j premières lettres du mot w.
Ainsi, par exemple, si $w = AABBBAABAB$, $w_A(1) = 1$, $w_A(2) = 2$, $w_A(3) = 2$, etc.

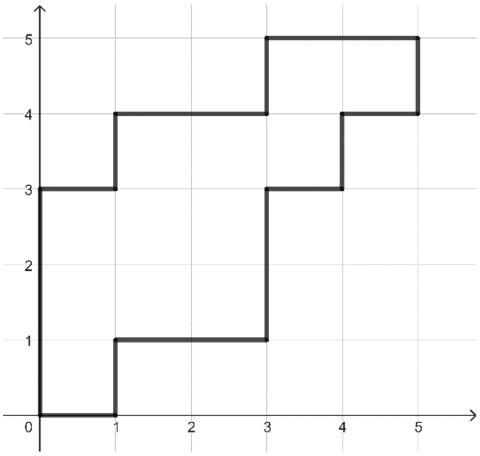
2. Pour $w = AABBBAABAB$, donner la valeur de $w_A(7)$ et de $w_B(7)$.
3. Pourquoi le point de coordonnées $\big(w_A(7); w_B(7)\big)$ est-il sur le chemin représenté précédemment ?

Pour n un entier strictement positif, on admettra que de manière générale, le chemin qui représente un mot $w \in \mathcal{W}_n$ est constitué des points de coordonnées $\big(w_A(j); w_B(j)\big)$ (où j est un entier tels que $1 \leq j \leq 2n$), connectés par des segments horizontaux ou verticaux.

Définition.
Soit n un entier strictement positif.
Si $v \in \mathcal{W}_n$ et $w \in \mathcal{W}_n$, la distance $d(v, w)$ est l'aire de la région entre les chemins qui représentent v et w.

4. On a représenté ci-contre deux mots v et w, où le chemin qui représente w est au-dessus de celui qui représente v.

   (a) Quels sont les mots v et w représentés sur ce schéma ?
   (b) À l'aide du graphique, déterminer $d(v, w)$.



5. Dans cette question, on fixe n un entier strictement positif, deux mots $v \in \mathcal{W}_n$, $w \in \mathcal{W}_n$, et j est un entier tel que $1 \leq j \leq 2n$.
   (a) Démontrer que les points de coordonnées $\left(v_A(j); v_B(j)\right)$ et $\left(w_A(j); w_B(j)\right)$ sont sur la droite d'équation $y = -x + j$.
   (b) On suppose que $w_A(j) \geq v_A(j)$. Combien y a-t-il d'entiers k tels que $(k; -k + j)$ appartient au segment d'extrémités $\left(v_A(j); v_B(j)\right)$ et $\left(w_A(j); w_B(j)\right)$?
   (c) On appelle carreau un carré de côté 1 dont les sommets ont des coordonnées entières.
   À l'aide de la question précédente, donner le nombre de carreaux dont une diagonale est incluse dans le segment d'extrémités $\left(v_A(j); v_B(j)\right)$ et $\left(w_A(j); w_B(j)\right)$.

6. Soient n un entier strictement positif et deux mots $v \in \mathcal{W}_n$, $w \in \mathcal{W}_n$. Démontrer que :

$$\begin{aligned} d(v,w) &= \sum_{j=1}^{2n} |w_A(j) - v_A(j)| \\ &= |w_A(1) - v_A(1)| + |w_A(2) - v_A(2)| + \cdots + |w_A(2n) - v_A(2n)| \end{aligned}$$

7. Soit n un entier strictement positif, et soient $u \in \mathcal{W}_n$, $v \in \mathcal{W}_n$ et $w \in \mathcal{W}_n$.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur v et w pour que $d(v, w) = 0$. Justifier.
   (b) A-t-on $d(w, v) = d(v, w)$? Justifier.
   (c) Démontrer que $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Partie D : Comparaison de distances

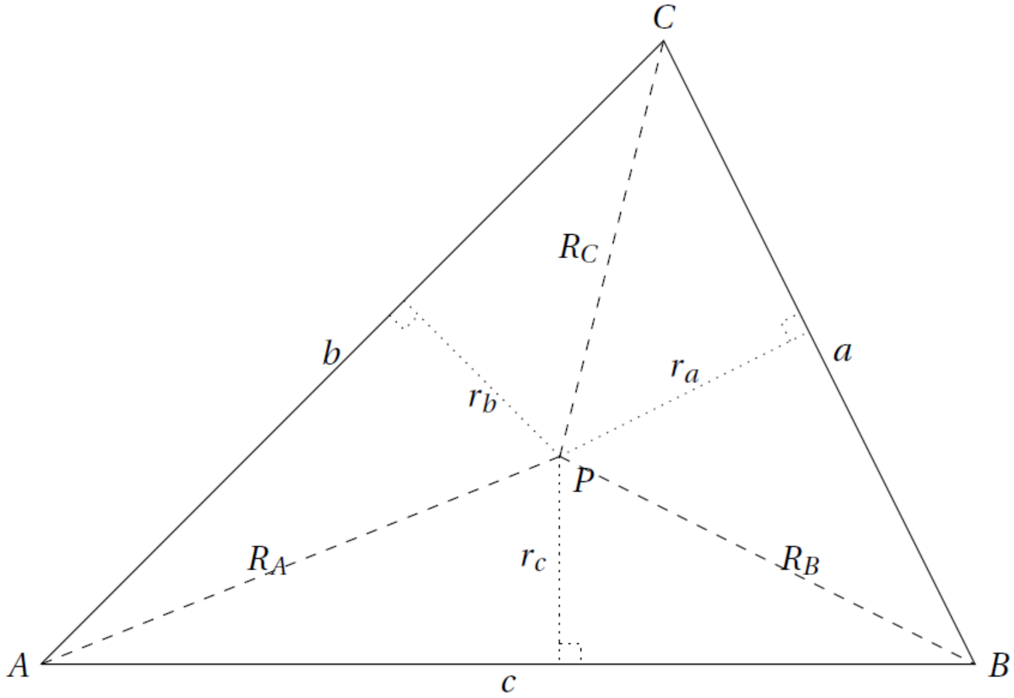
Soient n un entier strictement positif, $v \in \mathcal{W}_n$ et $w \in \mathcal{W}_n$.
Le but de cette partie est de comparer des manières de mesurer des distances entre ces mots.

1. Comment varie l'aire entre les chemins qui représentent v et w si l'on fait un swap dans w ?
2. En déduire que $d(v, w) \leq d_{swap}(v, w)$.
3. Démontrer que l'on a également $d(v, w) \geq d_{swap}(v, w)$, puis conclure.
4. À l'aide des questions précédentes, trouver le nombre minimal de swaps qui permettent de transformer $AABBBBBAAABAABBBAABAB$ en $BBBBBBAAAAAAAABBBABA$.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Inégalité dans un triangle

Soit ABC un triangle et P un point strictement à l'intérieur du triangle ABC.
On note :
• $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$;
• R_A, R_B et R_C les distances de P aux sommets A, B et C du triangle ;
• r_a, r_b et r_c les distances de P aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ du triangle ;



Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$R_A + R_B + R_C \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$

puis de s'intéresser au cas particulier où cette inégalité est une égalité.

Partie A :

Soit P' l'intersection de (AP) et de $[BC]$. On appelle R'_A, R'_B et R'_C les distances de P' aux sommets du triangle et r'_a, r'_b et r'_c les distances de P' aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ du triangle.
On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Donner la valeur de r'_a.
2. Compléter la **figure fournie en annexe** pour qu'apparaissent P', r'_b, r'_c, R'_A et H.
3. Démontrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}(br'_b + cr'_c)$.
4. En calculant l'aire du triangle ABC d'une autre manière, démontrer que $br'_b + cr'_c \leq aR'_A$.
5. Démontrer que $\frac{R'_A}{R_A} = \frac{r'_b}{r_b} = \frac{r'_c}{r_c}$.
6. En déduire que $br_b + cr_c \leq aR_A$.

Remarque :
L'inégalité $br_b + cr_c \leq aR_A$ sera notée (*) dans la suite. Il est important de comprendre qu'elle est valable quel que soit le point P strictement à l'intérieur du triangle considéré.

Partie B :

Définition :
L'axe de symétrie d'un angle est appelé bissectrice de cet angle.

1. Soit P'' le symétrique de P par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. On appelle R_A'', R_B'' et R_C'' les distances de P'' aux sommets du triangle et r_a'', r_b'' et r_c'' les distances de P'' aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ du triangle.
   En utilisant l'inégalité (*), démontrer que $br_c + cr_b \leq aR_A$.

Remarque :
Par symétrie, on pourra utiliser pour la suite, sans justification, que l'on a les trois inégalités :

$$br_c + cr_b \leq aR_A$$
$$cr_a + ar_c \leq bR_B$$
$$br_a + ar_b \leq cR_C$$

2. Démontrer que quels que soient x et y strictement positifs, on a l'inégalité :
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

3. Démontrer que :
$$R_A + R_B + R_C \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$

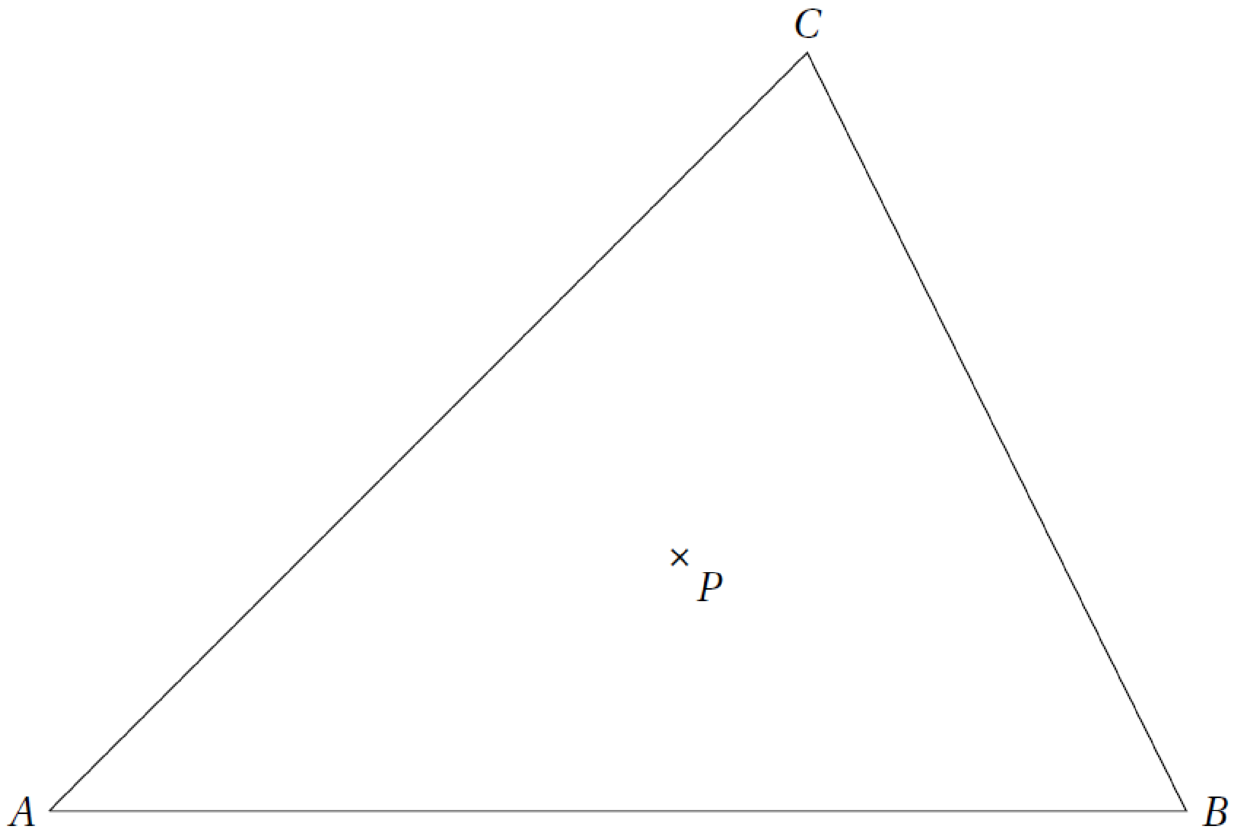
Partie C :

1. Démontrer que si l'inégalité précédente est une égalité, alors le triangle est équilatéral.

2. Dans ce cas, quels sont les points P réalisant l'égalité ?

Annexe pour l'exercice 2, <u>à rendre avec la copie.</u>

Figure pour la question A.2 :



Exercice 3
(candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

Diagonale d'un pentagone régulier

Partie I : Quelques propriétés du nombre d'or

1. Sur la **figure donnée en annexe, qui sera à rendre avec la copie**, on a représenté dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la parabole d'équation $y = x^2$.
   a. Représenter la droite d'équation $y = x + 1$.
   b. Lire graphiquement une valeur approchée de la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Pour la suite, on note φ la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
φ est appelé nombre d'or.

2. Démontrer que $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$ puis en déduire que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.
3. En déduire que $\varphi^4 = 3\varphi + 2$.
4. Déterminer les nombres entiers *a* et *b* tels que : $\varphi^5 = a\varphi + b$.
5. Vérifier que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie II : Le nombre d'or dans un pentagone régulier

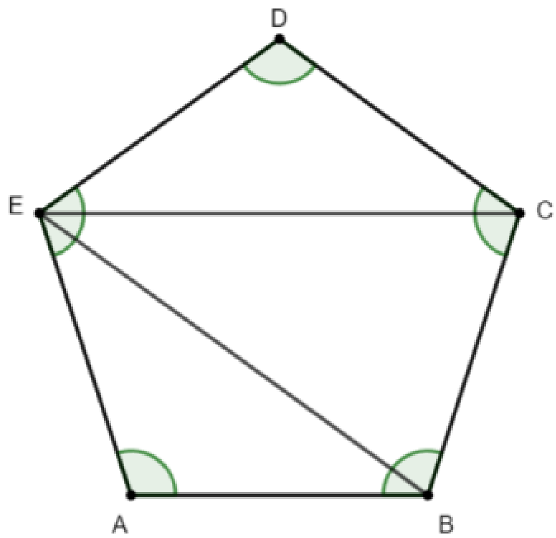
L'objectif de cette partie est de démontrer que le rapport entre la diagonale et le côté d'un pentagone régulier est égal à φ.
Un pentagone régulier a cinq côtés de même longueur et les cinq angles internes égaux.

1. **a. Calcul d'un angle interne du pentagone régulier**

   En utilisant les trois triangles tracés dans le pentagone régulier ci-contre, démontrer que la mesure d'un angle interne du pentagone est égale à 108°.

   b. Calcul des angles de l'étoile pentagonale

   En raisonnant sur la même figure, démontrer que les diagonales du pentagone coupent les angles internes en trois angles de même mesure (on dit que les diagonales trisectent les angles internes).



2. Compléter la **figure fournie en annexe, qui sera à rendre avec la copie**, en indiquant les mesures de tous les angles.
   Aucune justification n'est attendue.

3. Calcul de la diagonale

On définit comme unité la longueur du côté du pentagone régulier, soit $\mathrm{AB} = 1$.
On extrait du pentagone utilisé précédemment le triangle ABD.

a. Justifier que $\mathrm{BF} = \mathrm{FD} = 1$.

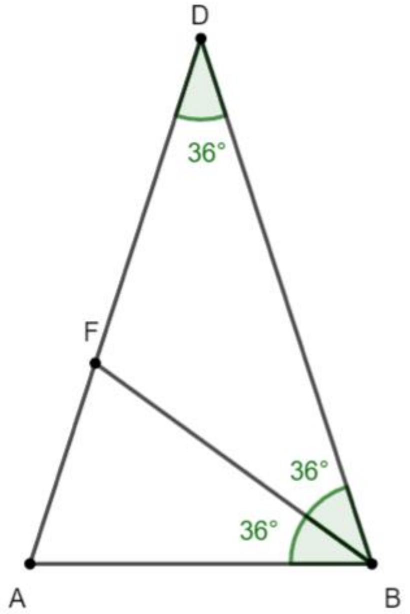
b. Démontrer que les mesures des trois angles des triangles ABF et ADB sont les mêmes.

c. Tracer séparément et découper ces deux triangles ABF et ADB.
Justifier soigneusement que ces triangles peuvent être placés en configuration de Thalès. Coller ainsi ces deux triangles sur votre copie.

d. En déduire que AD est solution de l'équation :

$$\frac{\mathrm{AD}}{1} = \frac{1}{\mathrm{AD} - 1}$$

e. Démontrer que $\mathrm{AD} = \varphi$.



Annexes pour l'exercice 3, à rendre avec la copie.

Figure pour la question I.1 :

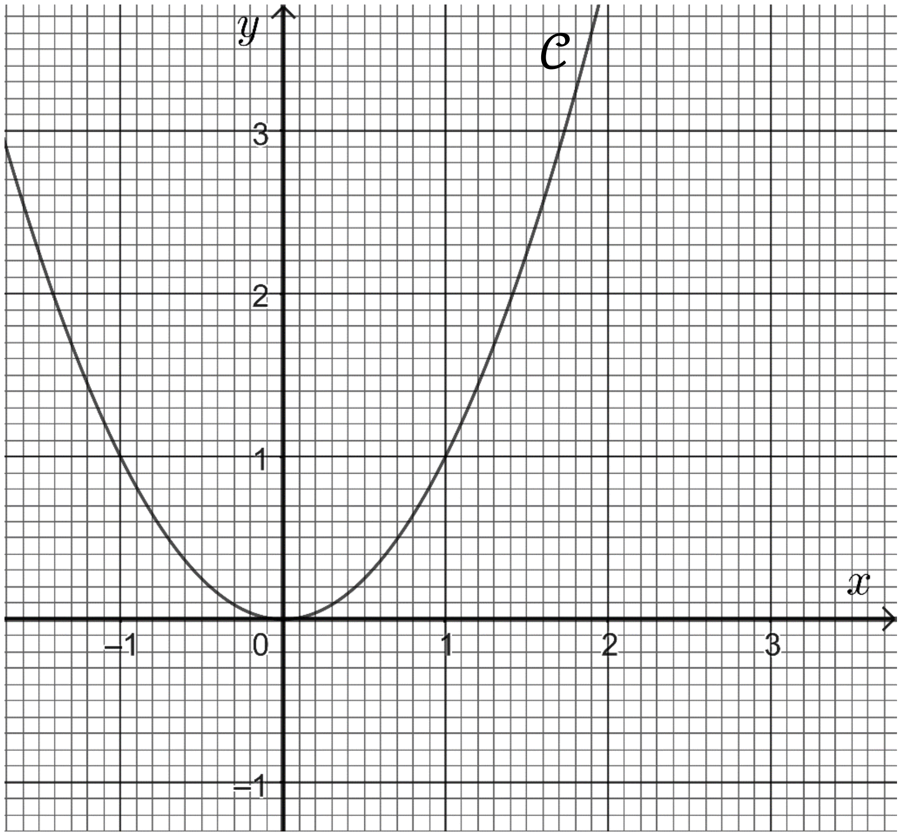


Figure pour la question II.2 :