MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades Nationales de Mathématiques 2023

Sujet académique
Strasbourg - Zone Europe Centrale et Orientale

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.
- **Tous les autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Le sujet est prévu pour être cherché en équipe de 2 à 4 candidats. Cependant, **une seule copie** pour l'ensemble du groupe est remise à l'issue des deux heures de composition.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur leur copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent leur composition.

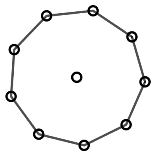
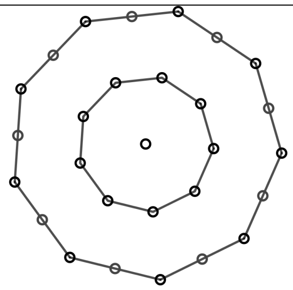
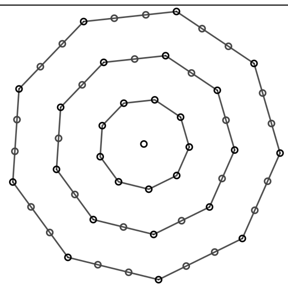
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Le sujet comporte 7 pages, celle-ci y compris.

Exercice 1 (tous les candidats)

Nombres ennéagonaux centrés

En arithmétique géométrique, un nombre ennéagonal centré est un type de nombre figuré, qui peut être représenté par un ennéagone régulier (polygone régulier à 9 côtés) ayant un point en son centre et tous ses autres points disposés autour de ce centre en couches ennéagonales successives. À partir de l'étape 2, chaque côté d'une couche ennéagonale contient un point de plus que chaque côté de la couche ennéagonale précédente.

Étape 0 On part d'un point (le centre)	**Étape 1** On rajoute un ennéagone avec 2 points sur chacun des ses côtés	**Étape 2** On rajoute un ennéagone avec 3 points sur chacun de ses côtés	**Étape 3** On rajoute un ennéagone avec 4 points sur chacun de ses côtés.
			

Dans cet exercice, on notera $E(n)$ le nombre ennéagonal centré obtenu à la n-ième étape de la construction.

1 Calcul des nombres ennéagonaux centrés E(4) et E(5)

1. (a) Justifier que l'on doit rajouter 36 points pour passer du nombre ennéagonal centré $E(3)$ au nombre $E(4)$.

   (b) En déduire la valeur du nombre $E(4)$.

2. Déterminer, en justifiant, la valeur du nombre ennéagonal centré $E(5)$.

2 Une petite démonstration

Pour tout entier naturel non nul n, on note $S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer, en fonction de n, l'expression de $2 \times S(n)$.
   Aide → On pourra écrire deux fois la somme $S(n)$ (l'une en dessous de l'autre) en sommant dans l'ordre inverse pour la deuxième somme puis on regroupera les termes deux par deux de façon astucieuse.

2. En déduire que $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3 Généralisation et calcul du nombre ennéagonal centré E(n) (pour n ≥ 1)

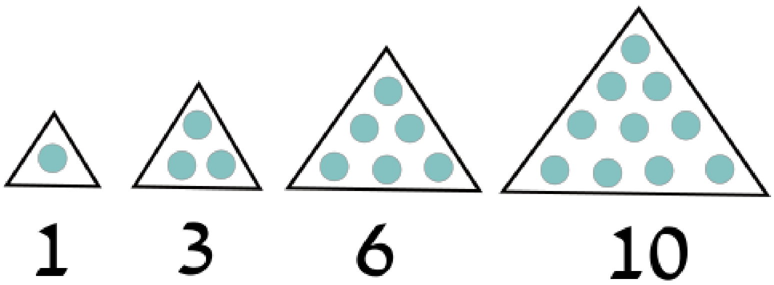
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. En s'inspirant du raisonnement effectué dans la partie 1, déterminer, en fonction de $S(n)$, l'expression explicite du n-ième nombre ennéagonal centré $E(n)$.
2. Démontrer que l'on a également $E(n) = \dfrac{(3n+1)(3n+2)}{2}$.
3. Dresser, en justifiant, la liste des 10 premiers nombres ennéagonaux centrés.

4 Lien entre nombre ennéagonal centré et nombre triangulaire

En arithmétique, un nombre triangulaire est un cas particulier de nombre polygonal dans le cas où le polygone régulier utilisé pour le représenter est un triangle équilatéral. Ce nombre correspond au nombre de points disposés dans le triangle.

On a représenté ci-dessous les quatre premiers nombres triangulaires :



Yoni Toker, CC BY-SA 4.0

Formellement, un nombre triangulaire se définit comme une suite T, définie pour tout entier naturel non nul par la relation : $T(1) = 1$ et $T(n+1) = T(n) + (n+1)$ pour tout entier naturel n non nul.

1. (a) Déterminer, en détaillant les calculs, la valeur des nombres triangulaires $T(5)$, $T(6)$ et $T(7)$.
   (b) Parmi les sept premiers nombres triangulaires, lesquels sont des nombres ennéagonaux centrés ?
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
   Établir, en justifiant, le lien entre l'expression explicite du nombre triangulaire $T(n)$ et celle de la somme $S(n)$ définie dans la partie 2.
3. Démontrer que le n-ième nombre triangulaire $T(n)$ est un nombre ennéagonal centré si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par 3 est égal à 1 (c'est-à-dire $n = 3k+1$ où $k \in \mathbf{N}$).

Exercice 2 (candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Regarder un diamètre sous un angle, sous une somme de deux angles

L'idée générale est de montrer que l'on ne peut pas observer une trop grande longueur sous un trop petit angle, puis d'introduire un deuxième observateur et de minorer la somme des deux angles.

Dans tout le sujet, les mesures des angles sont exprimées en degrés, et sont comprises entre 0 et 180 degrés.

1 Étude d'un triangle particulier

Soit ABC le triangle tel que $AB = 10$, $AC = 9,5$ et $BC = 9$. Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

1. Calculer HC.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} degré de l'angle $\widehat{BCA}$.

2 Cas du triangle

Soit ABC un triangle, où $AB \geq AC$ et $AB \geq BC$.

1. Hachurer la partie du plan où C peut se trouver sur le dessin en annexe. Justifier votre construction. On appellera cette partie du plan la « zone hachurée ».
2. Étudions ce qui se passe dans les différents cas suivants :
   (a) Si C appartient à la zone hachurée et au cercle de centre A passant par B...
      i. Majorer l'angle $\widehat{BAC}$.
      ii. En déduire que $\widehat{ACB} \geq 60°$.
   (b) Si C appartient à la zone hachurée mais n'appartient pas au cercle de centre A passant par B. On appelle C' le point du cercle de centre A passant par B tel que A, C et C' soient alignés dans cet ordre. Démontrer que $\widehat{ACB} \geq \widehat{AC'B}$.
3. Démontrer que, quelque soit la position du point C dans la zone hachurée,

$$\widehat{ACB} \geq 60°$$

   Penser à bien étudier tous les cas.

3 Une paramétrisation de presque toute la frontière de la zone hachurée

On définit un repère orthonormé de telle sorte que $A(-1;0)$ et $B(1;0)$. Nous nous intéresserons, dans cette partie, à l'ensemble $\mathscr{F}$ définit comme la réunion de $\mathscr{C}$, l'arc de cercle d'extrémités $D(0;\sqrt{3})$, $E(0;-\sqrt{3})$ et passant par $B(1;0)$, et de $\mathscr{C}'$, l'arc de cercle d'extrémités $D(0;\sqrt{3})$, $E(0;-\sqrt{3})$ et passant par $A(-1;0)$.

1. Pour tout point C de $\mathscr{F}$, différent de A, démontrer que la droite (AC) coupe l'axe des ordonnées en un point. On appellera t l'ordonnée de ce point.
2. (a) Pour tout point C de $\mathscr{C}$, démontrer que

$$C\left(\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}-1;\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

   (b) Pour tout point C de $\mathscr{C}'$, différent de A, démontrer que

$$C\left(\frac{4}{t^2+1}-1;\frac{4t}{t^2+1}\right)$$

3. En déduire, pour tout point C de $\mathscr{F}$, différent de A et différent de B, une expression de $\cos(\widehat{ACB})$ en fonction de t.
4. En déduire, pour tout point C de $\mathscr{F}$, différent de A et différent de B,

$$\widehat{ACB} \geq 60^\circ$$

4 Quelques quadrilatères

On considère, dans cette partie et la suivante, un autre repère orthonormée (O,I,J).

1. Soient $A(-5;0)$, $B(2;4)$, $C(5;0)$ et $D(4;-3)$. On s'intéresse au quadrilatère $ABCD$.
   (a) Démontrer que sa diagonale $[AC]$ a une longueur supérieure ou égale à n'importe quel segment d'extrémités situées sur le quadrilatère.
   (b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} degré de $\widehat{ABC}+\widehat{CDA}$.
2. Existe-t-il un quadrilatère convexe dont les longueurs des diagonales sont toutes deux inférieures à la longueur d'un des côtés ?
3. Existe-t-il un quadrilatère convexe $EFGH$ tel que sa diagonale $[EG]$ ait une longueur supérieure ou égale à n'importe quel segment d'extrémités situées sur le quadrilatère, mais tel que le sommet F n'appartienne pas au disque de diamètre $[EG]$?

5 Regarder un diamètre sous une somme de deux angles

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que sa diagonale $[AC]$ ait une longueur supérieure ou égale à n'importe quel segment d'extrémités situées sur le quadrilatère (note : on dit que $[AC]$ est un « diamètre » du quadrilatère).

Minorer le mieux possible $\widehat{ABC}+\widehat{CDA}$.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Expériences aléatoires

On dispose de deux dés, à six faces, indiscernables. L'un est truqué et donne un nombre impair une fois sur trois, et l'autre n'est pas truqué.
On définit quatre protocoles différent :

Protocole 1 : On choisit un dé au hasard à chaque lancer.

Protocole 2 : On choisit un dé au hasard et on le conserve pour tous les lancers.

Protocole 3 : On choisit un dé au hasard et on le lance. À chaque lancer suivant, on change de dé.

Protocole 4 : On choisit un dé au hasard et on le lance. S'il donne un nombre impair alors on conserve le même dé pour le lancer suivant, sinon on change de dé.

On note T, l'événement « choisir le dé truqué ».
On note Q, l'événement « obtenir un nombre impair au quatrième lancer ».

Déterminer la probabilité de l'événement Q pour chacun des protocoles proposés.

Annexe