ACADÉMIE
DE STRASBOURG

Liberté
Égalité
Fraternité

Partie 2

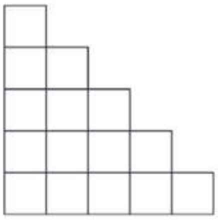
Exercices académiques

pour Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité

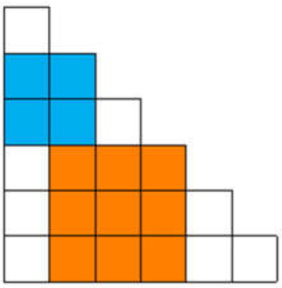
Exercice 1

Pour un nombre entier strictement positif n, un n −escalier est une figure composée de carrés unitaires, avec un carré dans la première rangée, deux carrés dans la deuxième rangée, et ainsi de suite, jusqu'à n carrés dans la n-ième rangée, où les carrés les plus à gauche dans chaque rangée sont alignés verticalement.

Par exemple, le 5-escalier est illustré ci-dessous.



Soit $f(n)$ le nombre minimal de tuiles carrées requises pour couvrir un n −escalier, toutes les tuiles carrées n'ayant pas nécessairement la même taille.
On dit qu'une tuile carrée de côté *k* est une *k*-tuile.



Cet exemple est un recouvrement d'un 6-escalier par une 3-tuile, une 2-tuile et huit 1-tuiles.

Partie 1

1. Montrer que $f(3) = 3$ et $f(4) = 7$.
1. Montrer que pour tout entier naturel non nul, $f(n) \geq n$.
2. Études du cas $n = 5$.
   a. Prouver que $f(5) \leq 1 + 2f(2)$.
   b. Déterminer $f(5)$.

Partie 2

On cherche maintenant à déterminer les valeurs de n pour lesquelles $f(n) = n$.
(1 et 3 sont des solutions).

1. Supposons un tel n trouvé avec $n \geq 4$.
   a. Montrer que le 2ème carré de la diagonale est recouvert par une 2-tuile.
   b. Montrer que le 4ème carré de la diagonale est recouvert par une 4-tuile.
   c. En déduire que $n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k$ et qu'il n'y a qu'un recouvrement possible pour lequel $f(n) = n$.
2. Réciproquement posons $p(k) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k$ avec k entier naturel.
   a. Montrer qu'un recouvrement d'un $p(k+1)$-escalier peut être constitué d'une 2^{k+1}-tuile et deux $p(k)$-escaliers.
   b. En déduire que si $f\big(p(k)\big) = p(k)$ alors $f\big(p(k+1)\big) = p(k+1)$.

   On admettra que $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

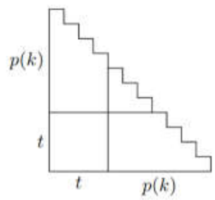
Partie 3

On cherche maintenant à déterminer les valeurs de n pour lesquelles $f(n) = n + 1$.

1. Donner des solutions de cette équation.
2. Supposons un tel n trouvé.
   a. Montrer que le carré en bas à gauche ne peut pas être recouvert par une tuile contenant un carré de la diagonale. On pourra distinguer suivant la parité de n.

   On pose alors t la taille de la tuile couvrant ce carré.

   b. Justifier qu'on obtient la figure suivante :



   c. Montrer qu'il existe deux entiers naturels k et l tels que $n = 2^{k+2} - 2^l - 1$. On pourra distinguer suivant la parité de n.
3. Conclure quant à l'objectif de cette partie

Exercice 2

À chaque sommet d'un triangle équilatéral de 48m de côté est attaché une chèvre à l'aide d'une corde. Les secteurs angulaires décrits par les chèvres, supposées ponctuelles, ne peuvent se croiser (au plus tangents) et sont intérieurs au triangle.

1. Chaque chèvre a une corde de 24 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
2. Une des trois chèvres a une corde de 32 m de longueur. Quelle est la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter ?

3. Aucune chèvre ne peut avoir une corde plus longue que la distance qui sépare son point d'attache au côté du triangle opposé à ce point. Déterminer la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter.

Exercice 3

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
On écrit les nombres entiers, de 1 à *n*, dans l'ordre croissant puis dans un ordre quelconque. On obtient ainsi deux listes, $L_1 = \{1,2, \dots , n\}$ et $L_1 = \{x_1, x_2, \dots , x_n\}$. On calcule ensuite les distances entre 1 et x_1, 2 et x_2, …, *n* et x_n.
Le tableau suivant donne un exemple de permutation et de calcul dans le cas où *n=5* (ce n'est pas le seul).

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	4	2	1	5	3
Distances	3	0	2	1	2

1. Dans le cas où *n*=4, puis dans le cas où *n*=5, donner un exemple de liste L_2 telle que toutes les distances soient deux à deux distinctes.
2. On suppose que *n=6*. Montrer que, quelle que soit la liste L_2, deux des distances obtenues, au moins, sont identiques.
3. Plus généralement, montrer que s'il existe une liste L_2 telle que toutes les distances obtenues soient deux à deux distinctes, alors *n* est un multiple de 4 ou $(n - 1)$ est un multiple de 4

Partie 2

Exercices académiques

Pour les candidats des voies technologique et pour Les candidats de voie générale n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 1

On considère un rectangle ABCD avec E un point de [AB] et F un point de [BC] tels que BE=2 et BF=3. On suppose en outre que les aires de ADE, DEBF et FDC sont égales.

Quelles sont les dimensions du rectangle ABCD?

Exercice 2

On définit une suite de la manière suivante :

- Le premier terme est $a_1 = 2133^{2022}$
- Pour tout entier $n \geqslant 2$, a_n est la somme des chiffres de a_{n-1}.

1. Montrer que a_1 a au plus 8088 chiffres.
2. Montrer que $a_2 < 9 \times 8088$.
3. En déduire que $a_4 < 18$.

On admet si N est un entier naturel divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est aussi divisible par 9.

4. Déterminer a_5. Que dire des termes suivants de la suite (a_n) ?

Exercice 3

À chaque sommet d'un triangle équilatéral de 48m de côté est attaché une chèvre à l'aide d'une corde. Les secteurs angulaires décrits par les chèvres, supposées ponctuelles, ne peuvent se croiser (au plus tangents) et sont intérieurs au triangle.

4. Chaque chèvre a une corde de 24 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
5. Une des trois chèvres a une corde de 32 m de longueur. Quelle est la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter ?
6. Aucune chèvre ne peut avoir une corde plus longue que la distance qui sépare son point d'attache au côté du triangle opposé à ce point. Déterminer la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter.