



Olympiades de mathématiques 2021

Mardi 23 mars 2021

13h-17h10

Deuxième partie de 15 heures 10 à 17 heures 10

SUJET POUR LES CANDIDATS NE SUIVANT PAS LA SPÉCIALITÉ
MATHÉMATIQUES EN CLASSE DE PREMIÈRE

Ce sujet comporte deux exercices



— Crédit Mutuel —
Enseignant

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

CASIO

Exercice 1 : à traiter par les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité en première générale

SEIZE NOMBRES

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie A

On inscrit dans l'ordre ou le désordre chaque entier de 1 à 16 dans l'une des cases du tableau ci-dessous:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Chacun des entiers compris entre 1 et 16 figure dans le tableau ci-dessous. Pour chaque groupe de trois cases consécutives de ce tableau, on calcule la somme des trois nombres contenus dans les trois cases.

- Combien de sommes calcule-t-on ainsi ?
- Proposer un exemple de tableau où les sommes calculées sont toutes différentes.
- Proposer un exemple de tableau où certaines des sommes calculées sont égales.
- Démontrer qu'il n'est pas possible que toutes les sommes calculées soient strictement inférieures à 24.
- Est-il possible que toutes ces sommes calculées soient inférieures ou égales à 24 ?
- Dans cette question, on suppose que toutes les sommes calculées sont inférieures ou égales à 25.
Démontrer que chacun des nombres $a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_{13}$ et a_{16} est supérieur ou égal à 11.

Partie B

On écrit sur une feuille 16 nombres entiers positifs consécutifs.

On note respectivement S et P la somme et le produit de ces 16 nombres.

1. Démontrer que P est divisible par 16.
2. Démontrer que P est divisible par 125.
3. Quels sont les trois derniers chiffres de P ?
4. On note n le plus petit des 16 nombres écrits sur la feuille.
 - a. Exprimer S en fonction de n .
 - b. Donner un exemple de 16 nombres entiers positifs consécutifs pour lesquels les trois derniers chiffres de P sont les mêmes que les trois derniers chiffres de S .
5. Démontrer que par contre, il n'est pas possible que les quatre derniers chiffres de P soient les mêmes que les quatre derniers chiffres de S .

Exercice 2 : à traiter par les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité en première générale

TRIANGLES DE STEINHAUS

On considère une première ligne formée de + et -, la 2ème est construite à partir de la première en utilisant la règle des signes de 2 signes consécutifs de la première ligne, ainsi de suite. La taille d'un triangle est égale à la longueur de la première ligne.

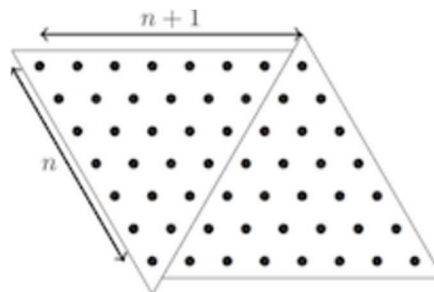
En voici un exemple :



Un triangle de Steinhaus est dit bien équilibré s'il comporte autant de signes - que de signes +.

1. Donnez tous les triangles de taille 3.
2. Combien de triangles différents de taille 4 existe-t-il ?
3. Combien de signes comporte un triangle de Steinhaus de taille n ?

On pourra s'inspirer de la figure ci-dessous.



4. On considère maintenant un triangle de Steinhaus de taille n , bien équilibré.
 - a. Montrer que nécessairement, n ou $n + 1$ est un multiple de 4.
 - b. Donner un exemple de triangle de Steinhaus bien équilibré de taille 7.