MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Zone dépendant de Strasbourg

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (fonction de Kaprekar) et 2 (distance entre les mots), les autres traitent les exercices numéros 2 (distance entre les mots) et 3 (femmes, hommes et syndicats).

Exercice académique numéro 1 (candidats de la série S)

La fonction de Kaprekar

Soit un entier naturel n. On calcule $K(n) = M - m$ où m est le nombre dont les chiffres sont ceux de n écrits dans l'ordre croissant et M est le nombre dont les chiffres sont ceux de n écrits dans l'ordre décroissant. Puis on réitère le calcul avec $K(n)$ au lieu de n et on continue ainsi.

On construit alors la suite des itérés de n : $K(n)$, $K(K(n))$, $K\Big(K\big(K(n)\big)\Big)$, … jusqu'à obtenir… ? C'est l'objet de cet exercice.

Exemple : $K(318) = 831 - 138 = 693$, puis $K(K(318)) = 963 - 369 = 594$, …

Partie 1 : les nombres à 1 chiffre

Que dire de $K(n)$ si n est un nombre à 1 chiffre ?

Partie 2 : les nombres à 2 chiffres

1. $n = 54$: calculer la suite des itérés de n.
2. $n = 13$: calculer la suite des itérés de n.
3. Choisir un nombre n à deux chiffres différent de 54 et 13 et calculer la suite des itérés de n. Quelle conjecture peut-on formuler ?
4. Démontrer cette conjecture concernant les nombres à 2 chiffres.

Partie 3 : les nombres à 3 chiffres

1. $n = 121$: calculer la suite des itérés de n.
2. $n = 149$: calculer la suite des itérés de n.
3. Démontrer que 495 est le seul point fixe à trois chiffres de la fonction K (c'est-à-dire que le seul entier n à trois chiffres qui vérifie l'équation $K(n) = n$ est 495).
4. Démontrer que la suite des itérés aboutit à deux cas : soit 0 soit 495.
5. a Ecrire un algorithme qui renvoie M à partir des chiffres a, b, c.
   b Ecrire un algorithme qui renvoie m à partir des chiffres a, b, c.
   c Ecrire un algorithme qui renvoie les points fixes de la fonction K.

Partie 4 : les nombres à 4 chiffres

Trouver le seul point fixe à 4 chiffres de la fonction K. On admettra l'unicité d'un tel point fixe.

Partie 5 : les nombres à 5 chiffres

1. La fonction K n'a aucun point fixe à cinq chiffres : quels nombres suffit-il de tester pour le prouver ? Combien de tests doit-on réaliser pour le prouver ?
2. On peut prouver que dans le cas des nombres à cinq chiffres, la fonction K admet trois cycles possibles: un de longueur 2 et deux de longueur 4. Expliquer ce que l'on entend par cycle et trouver ces trois cycles.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par tous les candidats)

Distance entre les mots

On considère l'ensemble E des lettres de l'alphabet latin, c'est à dire les 26 lettres de A à Z.

Les opérations que nous nous accordons sur les mots sont :

- ajouter une lettre
- supprimer une lettre
- changer une lettre du mot.

Par exemple à partir de **sort** , on peut en une opération obtenir **sor**, **tort** ou **sorte** mais on ne peut pas obtenir **tors**.

On définit sur l'ensemble des mots formés à partir de E, une distance d entre deux mots X et Y comme étant le nombre minimal d'opérations pour passer du mot X au mot Y avec les opérations autorisées ci-dessus.

Nous avons avec cette définition les distances suivantes :

- d(sort,sor)=1
- d(sort,sortie)=2
- d(tout,lourd) ≥ 3 (tout->lout->lour->lourd)

1. Quelle est la distance entre X=«olympiades» et Y=«olympe»?
2. On prend les mots X=«sosie», Y=«assortie» et Z=«riposte». Comparer la distance entre X et Y avec celle entre X et Z.
3. On considère le mot X = «seau» et on note Ω l'ensemble formé des anagrammes du mot X .
    1. Combien d'anagrammes est-il possible de former à partir de X ?

    2. Déterminer le nombre de mots se trouvant à distance 2 de X parmi tous les mots de l'ensemble Ω .
4. On considère le mot X=«lu».
    1. Combien de mots sont à une distance 1 de X ?
    2. Combien de mots sont à une distance 2 de X ?

Exercice académique numéro 3 (candidats autres que ceux de la série S)

Femmes, hommes et syndicats

Dans une entreprise, il y a 800 employés. On sait également que 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.

Combien y a-t-il donc de femmes célibataires non syndiquées dans cette entreprise ?