Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Académie de Strasbourg 2017

• Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

• Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats de la filière S ont à résoudre les deux exercices suivants:

• Exercice académique1 S (des triangles),

• Exercice académique2 S (des trinômes).

Les candidats des filières autres que S ont à résoudre les deux exercices suivants:

• Exercice académique3 nonS (des distances),

• Exercice académique4 nonS (des trinômes).

Exercice académique1 S: des triangles

• On considère un triangle ABC non aplati avec AB=10cm , un point M du segment $[AB]$ différent de A et x un réel positif.

• On construit le point P tel que $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{AM}$ et le point Q comme étant l'intersection entre $[AC]$ et la parallèle à (PC) passant par M.

1. Faire une figure avec $x = \frac{3}{2}$.
2. Montrer que P appartient à $[AB]$, à la condition que :
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{10 - AM}{AM}.$$
3. Déterminer la distance AM en fonction de x, pour que (PQ) soit parallèle à (BC).
4. Dans cette question, on se place dans le cas où (PQ) est parallèle à (BC).
   (a) Montrer que le rapport de l'aire de APC par l'aire de ABC est $\dfrac{1}{x+1}$.
   (b) Déterminer l'aire de PQM en fonction de l'aire de AMQ et x.
   (c) Quel est le rapport des aires de PQM et ABC ?
   (d) Pour quelle valeur de x, l'aire de PQM est-elle maximale et quel est alors le rapport de l'aire de PQR par l'aire de ABC?

Exercice académique2 S: des trinômes

• **Nous considérons ici les trinômes de la forme** $x^2 + bx + c$ **avec** b **et** c **des entiers dans l'intervalle** $[1, 2017]$. **Ils forment un ensemble que l'on notera** E.

• **Pour un trinôme** $T = x^2 + bx + c$ **de l'ensemble** E**, on notera** $\Delta(T)$ **le nombre** $\Delta(T) = b^2 - 4c$.

• **Nous dirons qu'un trinôme de l'ensemble** E **est de type entier si ses racines sont des entiers et de type imaginaire s'il n'a pas de racines réelles.**

1. Donner un exemple de trinôme de chaque type.
2. Y a-t-il des éléments de E qui ne sont ni de type entier, ni de type imaginaire?
3. Combien existe-t-il de trinômes dans l'ensemble E?
4. Démontrer que si un entier est pair, alors son carré aussi. Qu'en est-il dans le cas d'un entier impair?
5. Démontrer qu'un trinôme $T = x^2+bx+c$ de l'ensemble E est de type entier si et seulement si $\Delta(T)$ est le carré d'un entier.
6. A tout trinôme de type entier $T = x^2 + bx + c$, on fait correspondre le trinôme $T' = x^2 + b'x + c'$ tel que $b' = b - 1 - \sqrt{\Delta(T)}$ et $c' = c$.
   (a) Vérifier que par ce processus, le trinôme de type entier $T = x^2+3x+2$ est transformé en un trinôme de type imaginaire.
   (b) Est-ce que le trinôme de type imaginaire $T' = x^2 + 2x + 2$ peut être obtenu par ce processus à partir d'un trinôme de type entier?
   (c) Démontrer que par ce processus, si T est un trinôme de type entier de E, alors T' est un trinôme de type imaginaire de E.
   (d) Est-ce que deux trinômes de type entier de E peuvent donner par ce processus le même trinôme de type imaginaire de E?
7. Y a-t-il dans E davantage de trinômes de type entier ou de type imaginaire?

Exercice académique3 nonS: des distances

On considère un rectangle $ABCD$**. Un point** M **est à l'intérieur de ce rectangle. On connait la distance du point** M **aux trois sommets** A, B, C. **Ainsi,** $MA = 4, MB = 7$ **et** $MC = 6$.

Quelle est la distance du point M au point D?

Exercice académique4 nonS: des trinômes

• **Nous considérons ici les trinômes de la forme** $x^2 + bx + c$ **avec** b **et** c **des entiers dans l'intervalle** $[1, 2017]$. **Ils forment un ensemble que l'on notera** E.

• **Pour un trinôme $T = x^2 + bx + c$ de l'ensemble E, on notera $\Delta(T)$ le nombre** $\Delta(T) = b^2 - 4c$.

• **Nous dirons qu'un trinôme de l'ensemble E est de type entier si ses racines sont des entiers et de type imaginaire s'il n'a pas de racines réelles.**

1. Pour chacun de ces deux trinômes, dire s'il est de type entier ou de type imaginaire.

$$T_1 = x^2 + 5x + 6 \quad et \quad T_2 = x^2 + x + 1.$$

2. Donner un exemple de trinôme de chaque type qui soit différent de T_1 et de T_2.

3. Y a-t-il des éléments de E qui ne soient ni de type entier, ni de type imaginaire?

4. Combien existe-t-il de trinômes dans l'ensemble E?

5. Démontrer que si un entier est pair, alors son carré aussi. Qu'en est-il dans le cas d'un entier impair?

6. Démontrer qu'un trinôme $T = x^2 + bx + c$ de l'ensemble E est de type entier si et seulement si $\Delta(T)$ est le carré d'un entier.
