MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

académie Strasbourg

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de Strasbourg

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10 –

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

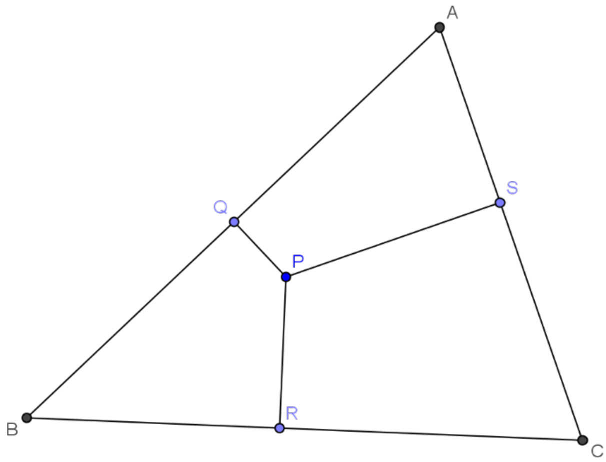
Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Triangle équilatéral*) et 2 (*Cercles tangents*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Triangle équilatéral*) et 3 (*Déplacements d'une coccinelle*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral.
Soit P un point à l'intérieur du triangle.
On note Q, R, S les projetés orthogonaux de P sur $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
On sait que $PQ = 1$, $PR = 2$ et $PS = 3$.

Patrick a tenté de faire une figure, mais il constate que son triangle n'est pas équilatéral :



1. Le but de la question est de construire une figure exacte.
   a. Claudine a réussi à faire la figure en calculant l'angle $\widehat{QPR}$. Qu'a-t-elle trouvé ? (justifier votre réponse).
   b. Faire une figure à l'échelle. Cette figure sera complétée tout au long de l'exercice.

2. Le but de la question est de calculer la longueur du côté du triangle ABC.
   a. La droite (PS) coupe (AB) en T. Calculer la longueur PT. Calculer la longueur AT.
   b. Soit H le projeté orthogonal de T sur $[PR]$. Montrer que H est le milieu de $[PR]$.
   c. Soit K le projeté orthogonal de T sur $[BC]$. Calculer BT.
   d. En déduire la longueur du côté du triangle ABC.

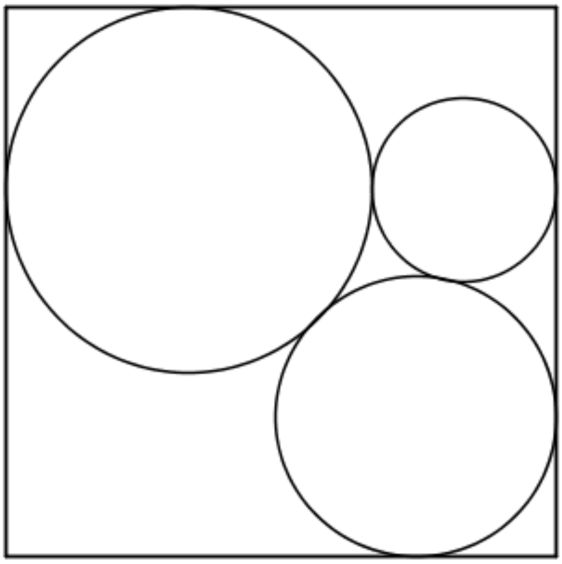
3. On note R_C le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et R_I le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Démontrer que $PQ + PR + PS = R_C + R_I$

4. Retrouver la réponse à la question 2 en utilisant un calcul d'aires.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Cercles tangents

Dans le carré suivant, de côté 1, on a dessiné trois cercles tangents entre eux, un grand, un moyen et un petit. Le grand cercle et le moyen sont tangents à deux côtés du carré, le petit cercle est tangent à un côté du carré. Le centre du grand cercle et le centre du petit cercle sont sur une même droite parallèle à un des côtés du carré.

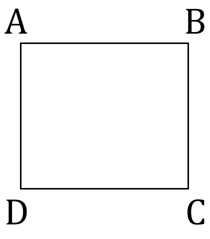


1. Déterminer la distance entre le centre du grand cercle et celui du petit cercle.
2. Manuel peut calculer la distance entre le centre du cercle moyen et celui du grand cercle. Faites aussi bien que lui.
3. Déterminer la distance entre le centre du cercle moyen et celui du petit cercle.
4. Peut-on trouver le rayon des trois cercles ?

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats autres que la série S)

Déplacements d'une coccinelle

Dans cet exercice, une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré *ABCD* **en partant toujours du point *A***.
Elle peut rebrousser chemin si elle le souhaite.



On appelle déplacement élémentaire tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré, d'un sommet à un autre. A partir d'un sommet donné, il y a donc deux déplacements élémentaires possibles.
Une marche est constituée de déplacements élémentaires.

Ainsi, la marche A->B->A->D->C a pour départ A, pour arrivée C et est constituée de quatre déplacements élémentaires.

Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés du carré $ABCD$ en partant du point A et on considère que tous les déplacements élémentaires sont équiprobables.

1. Arrivées possibles.
   a. Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements élémentaires ?
   b. Quelles sont les arrivées possibles si la marche comporte un nombre pair de déplacements élémentaires ?

2. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements élémentaires. Quelle est la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en deux déplacements élémentaires » ?

3. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de déplacements élémentaires	1	2	3	4	5
Probabilité d'arriver en A					

Partie B

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés du carré $ABCD$ (toujours en partant du point A) et a cette fois deux fois plus de chances de se déplacer verticalement qu'horizontalement. En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements élémentaires.
   a. Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en exactement deux déplacements élémentaires».
   b. Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en C en exactement deux déplacements élémentaires».

2. Dans cette question, la coccinelle effectue davantage de déplacements élémentaires.
   a. Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en exactement quatre déplacements élémentaires».
   b. Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en exactement six déplacements élémentaires».