OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

ACADEMIE DE STRASBOURG

Mercredi 20 mars 2013

CLASSE DE PREMIERE
SECTION S

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées

Exercice académique 1 : Hélène et Helene

1. Hélène a écrit chaque lettre de son prénom sur un petit carton.
   Elle mélange les six cartons et forme au hasard un mot de six lettres.

   a. Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ?
   (on tient compte des accents)

   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un mot se terminant par NE ?

   c. Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par une consonne ?

2. Hélène réécrit les lettres de son prénom sur six cartons mais sans accents.
   Elle mélange les six cartons et forme au hasard un mot de six lettres.
   Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ?

Exercice académique 2 : Produit plus un

$1\times2\times3\times4+1=25$

$2\times3\times4\times5+1=121$

$3\times4\times5\times6+1=361$

1. Ecrire les deux lignes suivantes.

2. Par ce procédé, peut-on obtenir 2013 ?

3. Qu'obtient-on sur la dixième ligne ?

4. Obtient-on toujours un nombre impair ?

5. Obtient-on toujours un carré d'un entier ?

6. Peut-on obtenir 2013^2 ? Sinon quelle est la valeur la plus proche de 2013^2 que l'on puisse obtenir ?

Exercice national 1 : Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

   b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

   b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

   b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

   c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

   b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

   c.Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

   b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
   En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

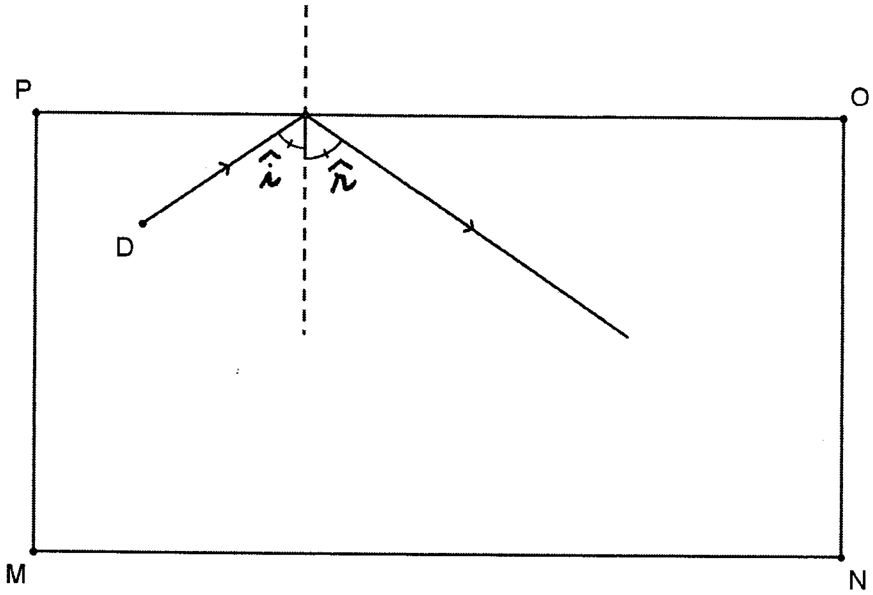
   b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice national 2 : Le billard rectangulaire

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.

Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i}=\hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?