OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

ACADEMIE DE STRASBOURG

Mercredi 11 mars 2009

CLASSE DE PREMIERE S

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées
L'énoncé comporte trois pages

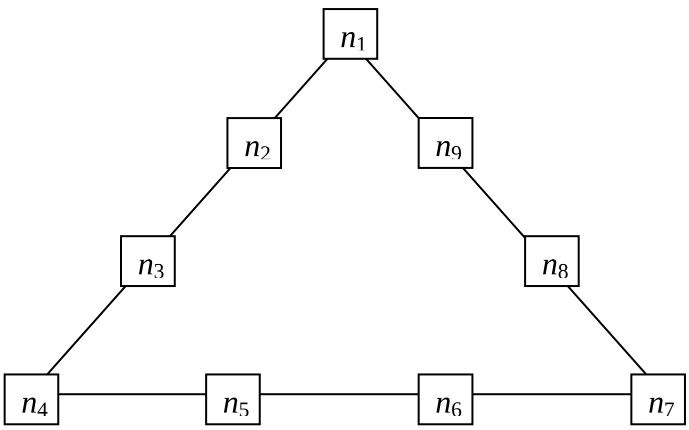
Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

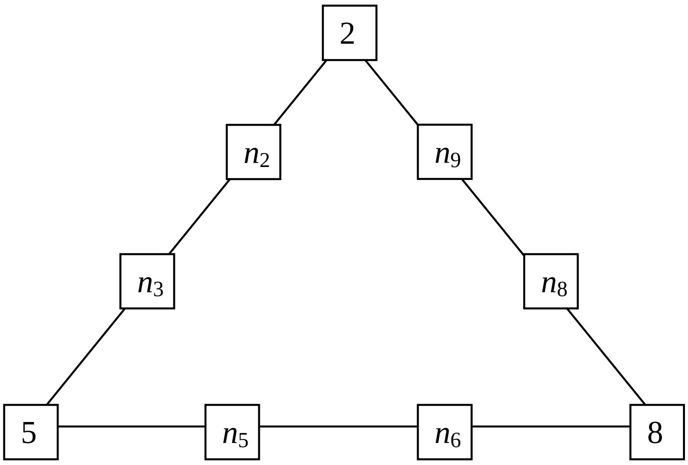


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire *S*-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle *S*-magique et on appelle *T* la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$

c. Donner la liste des couples $(S\ ,\ T)$ ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle *S*-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de *S* existe-t-il au moins un triangle *S*-magique ?

Exercice 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter *c* la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3

On dispose de deux nappes rondes de même diamètre et d'une table carrée.
On se demande si il est possible de recouvrir entièrement la table avec les deux nappes.
Le carré a pour côté 1,8 mètre.

1- On suppose que le diamètre des nappes est 2,009 mètres . Est-ce possible ?

2- Déterminer le diamètre minimal des nappes pour que ce soit possible

Exercice 4

On appelle partition d'un entier strictement positif toute décomposition de cet entier en somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, les partitions de 5 sont 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 et 1+1+1+1+1.
On effectue le produit des termes intervenant dans chaque partition et on cherche à obtenir le produit maximum.
Dans l'exemple précédent, le produit maximum est donc obtenu avec la partition 5=3+2 et vaut 3x2=6.

1- Quel est ce maximum pour les entiers 6, 7 et 8 ?

2- Pour les entiers 2007, 2008 et 2009, déterminer ce maximum et la(les) partition(s) correspondante(s).

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

ACADEMIE DE STRASBOURG

Mercredi 11 mars 2009

CLASSE DE PREMIERE
TOUTES SECTIONS SAUF S

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées
L'énoncé comporte trois pages

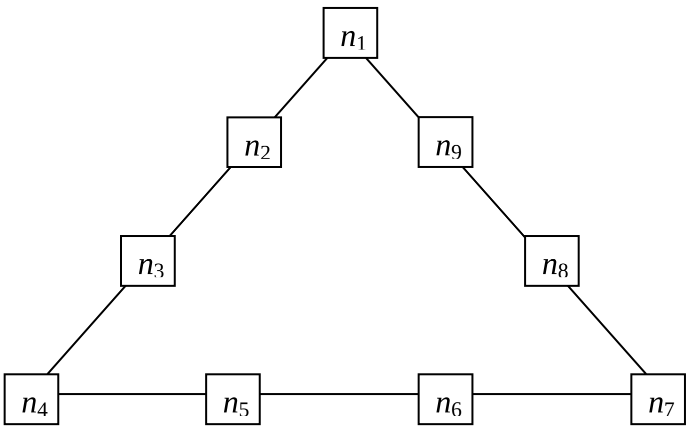
Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

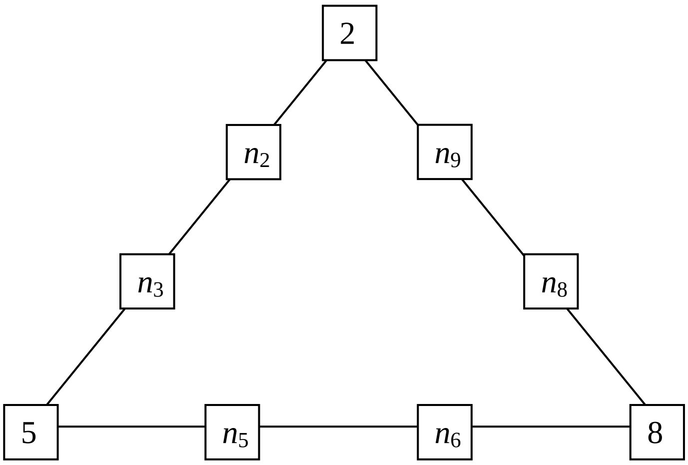


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

d. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

e. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$

f. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

<u>Exercice 2</u>

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3

Une voiture a roulé 20000 kilomètres, chacune des cinq roues (dont la roue de secours) est usée de la même façon. Chaque roue a un diamètre de 50 centimètres.

1- Combien chaque roue a-t-elle parcouru de kilomètres ?

2- Combien de tours chaque roue a-t-elle fait ?

Exercice 4

On appelle partition d'un entier strictement positif toute décomposition de cet entier en somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, les partitions de 5 sont 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 et 1+1+1+1+1.
On effectue le produit des termes intervenant dans chaque partition et on cherche à obtenir le produit maximum.
Dans l'exemple précédent, le produit maximum est donc obtenu avec la partition 5=3+2 et vaut 3x2=6.

1- Quel est ce maximum pour les entiers 6, 7 et 8 ?

2- Pour les entiers 12, 13 et 14, déterminer ce maximum et la(les) partition(s) correspondante(s). Justifier votre réponse.
On ne demande pas de lister toutes les partitions possibles des entiers 12, 13 et 14…