OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

15 mars 2006

CLASSE DE PREMIERE ES, GMF

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées
L'énoncé comporte trois pages

Exercice 1 :

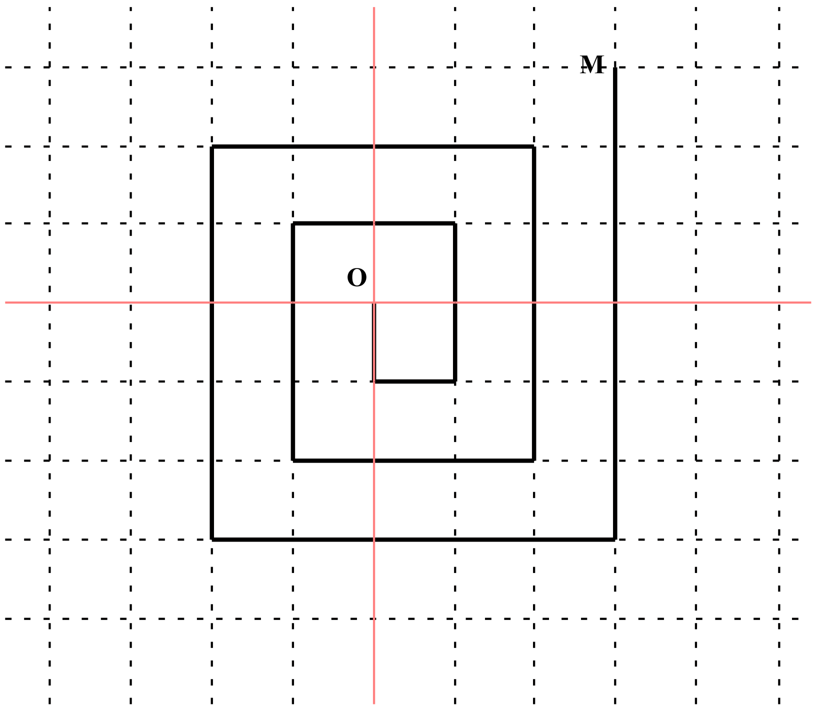
Pour les besoins d'un jeu, un imprimeur fait imprimer des cartes. Sur chaque carte figure un nombre entier compris entre 100 et 999. Le 1 est imprimé « I ». Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux entiers selon qu'on les oriente dans un sens ou dans l'autre . Par exemple, I09 se lira 60I en retournant la carte.
Dans un tel cas, par mesure d'économie, il n'imprime qu'une carte au lieu de deux.
Combien de cartes doit-il imprimer en tout pour que tous les entiers compris entre 100 et 999 soient ainsi représentés ?

Exercice 2 :

1. Existe-t-il des entiers naturels n tels que $\frac{9n-16}{n^2+4}$ soit égal à 0, à 1 ou à 2 ?
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{9n-16}{n^2+4}$ soit un entier naturel.

Exercice 3 : la « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l*(M) la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

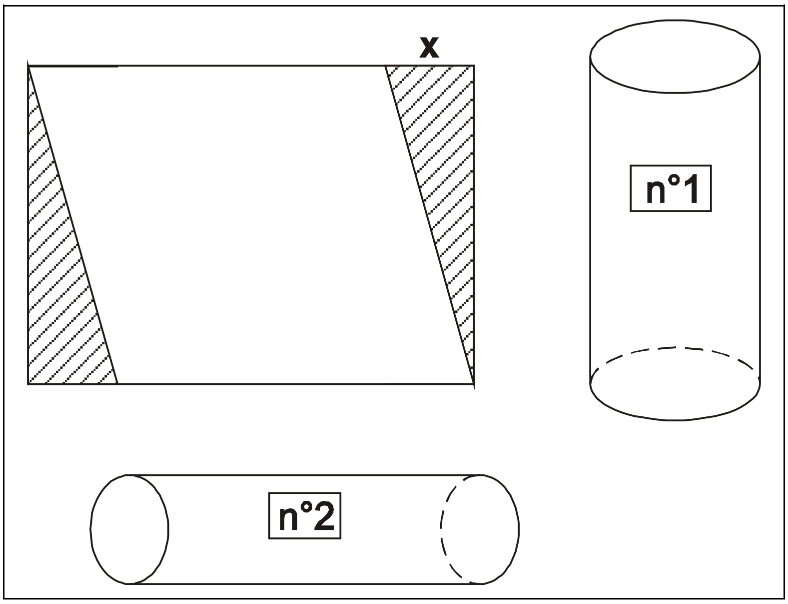
On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, 1+2+3+…+n = $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 4 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

15 mars 2006

CLASSE DE PREMIERE S, STI

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les calculatrices sont autorisées
L'énoncé comporte trois pages

Exercice 1 :

Pour les besoins d'un jeu, un imprimeur fait imprimer des cartes. Sur chaque carte figure un nombre entier compris entre 100 et 999. Le 1 est imprimé « I ». Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux entiers selon qu'on les oriente dans un sens ou dans l'autre .
Par exemple, I09 se lira 60I en retournant la carte.
Dans un tel cas, par mesure d'économie, il n'imprime qu'une carte au lieu de deux.
Combien de cartes doit-il imprimer en tout pour que tous les entiers compris entre 100 et 999 soient ainsi représentés ?

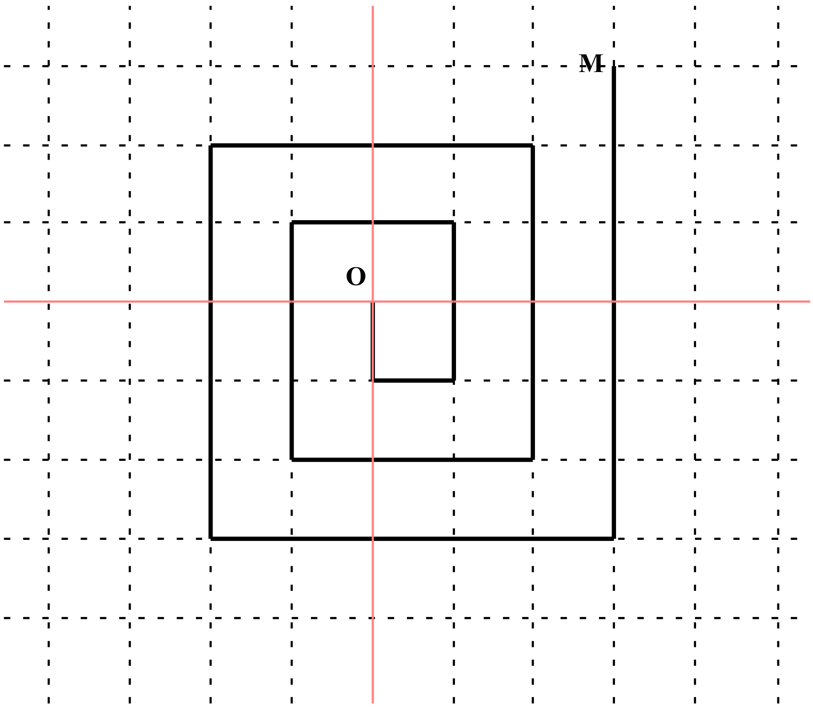
Exercice 2 :

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{9n-16}{n^2+4}$ soit un entier naturel

2. Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{n^3-5n+16}{n^2+4}$ soit un entier naturel

Exercice 3 : « la spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l(*M*)* la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

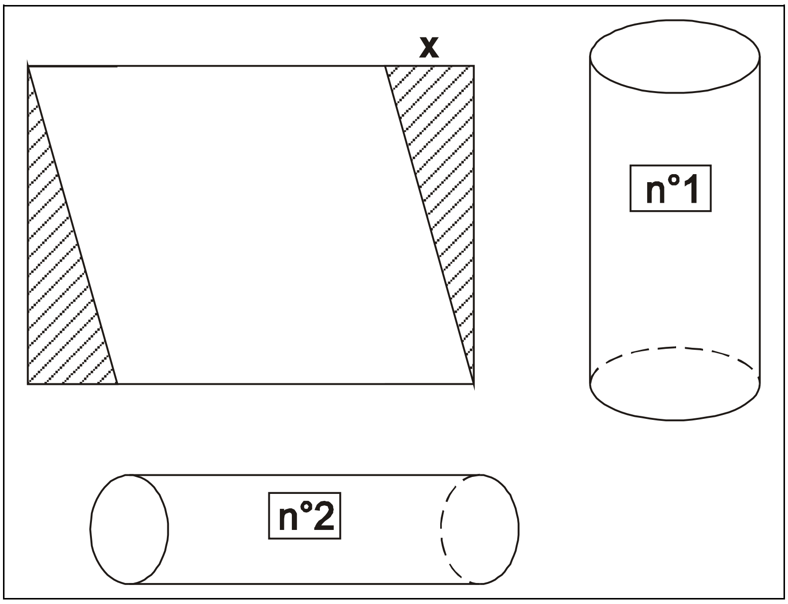
On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, 1+2+3+…+n = $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 4 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Enoncés et indications de solutions des exercices académique des Olympiades 2006 :

Exercice 1 (commun à toutes les séries) :

Pour les besoins d'un jeu, un imprimeur fait imprimer des cartes. Sur chaque carte figure un nombre entier compris entre 100 et 999. Le 1 est imprimé « I ». Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux entiers selon qu'on les oriente dans un sens ou dans l'autre .
Par exemple, I09 se lira 60I en retournant la carte.
Dans un tel cas, par mesure d'économie, il n'imprime qu'une carte au lieu de deux.
Combien de cartes doit-il imprimer en tout pour que tous les entiers compris entre 100 et 999 soient ainsi représentés ?

Indications de solution :
Sans l' « économie » il faudrait imprimer 900 cartes, il reste à voir combien de cartes sont « à double lecture » . Les chiffres à étudier particulièrement sont le 0 (attention à ceux qui se terminent par un 0), le 1 et le 8 qui sont invariants par le « retournement » et le 6 et 9 qui sont « symétriques ».
Pour chaque centaine commençant par 6 ou 9, il y a 20 cartes à double lecture : en effet, il y a 5 choix pour le deuxième chiffre et 4 pour le troisième (puisqu'il faut enlever celles dont le chiffre se termine par 0).Pour chaque centaine commençant par 1 ou 8 il y en a 17 puisque 101, 111, 181 et 808, 888, 818 se lisent de la même façon quand on les retourne. Cela fait 20+20+17+17 =74 cartes « à double lecture » ; ainsi seule la moitié sera imprimée.
Le jeu comprendra donc 900-37=836 cartes.

Exercice 2 (version série S-STI plus complète que la version ES-GMF) :

1. Déterminer les entiers naturels n tels que soit un nombre entier.

2. Existe-t-il des entiers naturels n tels que soit un nombre entier ?

Indications de solution :
1. $\frac{9n-16}{n^2+4} \geq 1$ donne $(n-4)(n-5) \leq 0$ soit $n=4$ ou 5.

Le cas $\frac{9n-16}{n^2+4}$ = 0 est à exclure.

2. Ecrire $n^3-5n+16=n(n^2+4)+16-9n$ et utiliser les résultats du 1.