Enoncés et indications de solutions des exercices académique des Olympiades 2006 :

Exercice 1 (commun à toutes les séries) :

Pour les besoins d'un jeu, un imprimeur fait imprimer des cartes. Sur chaque carte figure un nombre entier compris entre 100 et 999. Le 1 est imprimé « l ». Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux entiers selon qu'on les oriente dans un sens ou dans l'autre . Par exemple, l09 se lira 60l en retournant la carte.
Dans un tel cas, par mesure d'économie, il n'imprime qu'une carte au lieu de deux.
Combien de cartes doit-il imprimer en tout pour que tous les entiers compris entre 100 et 999 soient ainsi représentés ?

Indications de solution :
Sans l' « économie » il faudrait imprimer 900 cartes, il reste à voir combien de cartes sont « à double lecture » . Les chiffres à étudier particulièrement sont le 0 (attention à ceux qui se terminent par un 0), le 1 et le 8 qui sont invariants par le « retournement » et le 6 et 9 qui sont « symétriques ».
Pour chaque centaine commençant par 6 ou 9, il y a 20 cartes à double lecture : en effet, il y a 5 choix pour le deuxième chiffre et 4 pour le troisième (puisqu'il faut enlever celles dont le chiffre se termine par 0).Pour chaque centaine commençant par 1 ou 8 il y en a 17 puisque 101, 111, 181 et 808, 888, 818 se lisent de la même façon quand on les retourne. Cela fait 20+20+17+17 =74 cartes « à double lecture » ; ainsi seule la moitié sera imprimée.
Le jeu comprendra donc 900-37=863 cartes.

Exercice 2 (version série S-STI plus complète que la version ES-GMF) :

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{9n-16}{n^2+4}$ soit un nombre entier.
2. Existe-t-il des entiers naturels n tels que $\dfrac{n^3-5n+16}{n^2+4}$ soit un nombre entier ?

Indications de solution :
1. $\dfrac{9n-16}{n^2+4} \geq 1$ donne $(n-4)(n-5) \leq 0$ soit $n = 4$ ou 5.
Le cas $\dfrac{9n-16}{n^2+4} = 0$ est à exclure.
2. Ecrire $n^3 - 5n + 16 = n(n^2+4) + 16 - 9n$ et utiliser les résultats du 1.