OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
(Strasbourg)
SESSION DE 2004
Solutions

Exercice 2

1) On vérifie facilement que la somme des distances du point *M* aux côtés du carré vaut 2*a*, où *a* désigne la longueur du côté du carré.

2) Notons *A, B* et *C* les trois sommets du triangle et *I, J* et *K* les projetés orthogonaux de *M* sur [*AB*], [*BC*] et [*AC*] respectivement. L'aire du triangle *ABM* vaut ½. *AB.MI.* La somme des aires des trois triangles *ABM, ACM* et *BCM* est égale à l'aire du triangle *ABC*, d'où

$$AB.MI + AC.MK + BC.MJ = 2 \text{ aires } (ABC)$$

On en déduit, puisque le triangle est équilatéral

$$MI + MK + \quad MJ = 2/a.\text{Aire } (ABC)$$

3) Pour un polygone régulier convexe, on considère de même la somme des aires des *n* triangles formés par le point *M* et deux sommets consécutifs du polygone.

Exercice 3

Notons u_n la suite définie par le nombre de murs à *n* briques.

Pour *n*=1, il n'y a qu'un suel mur, donc u_1=1.

On remarque que tout mur de *n* briques s'obtient à partir d'un mur construit avec *n*-1 briques en posant soit une brique au-dessus de la colonne la plus à droite, soit une birque à droite de la colonne la plus à droite. On peut donc construire deux nouveaux murs de *n* briques à partir d'un mur de *n*-1 briques. On en déduit la relation de récurrence.

$$U_n\text{-}1=2.u_n$$

et

$$U_n=2^n.$$