Annexe 1 : Les fractions et les décimaux au cycle 3

Groupe APMEP « La Course aux Nombres »

Anne-France Acciari - Anne Archis - Michel Barthel - Annabelle Bontems
Hélène Chilles - Florence Schoepfer - Anne Schultz - Sophie Schwartz

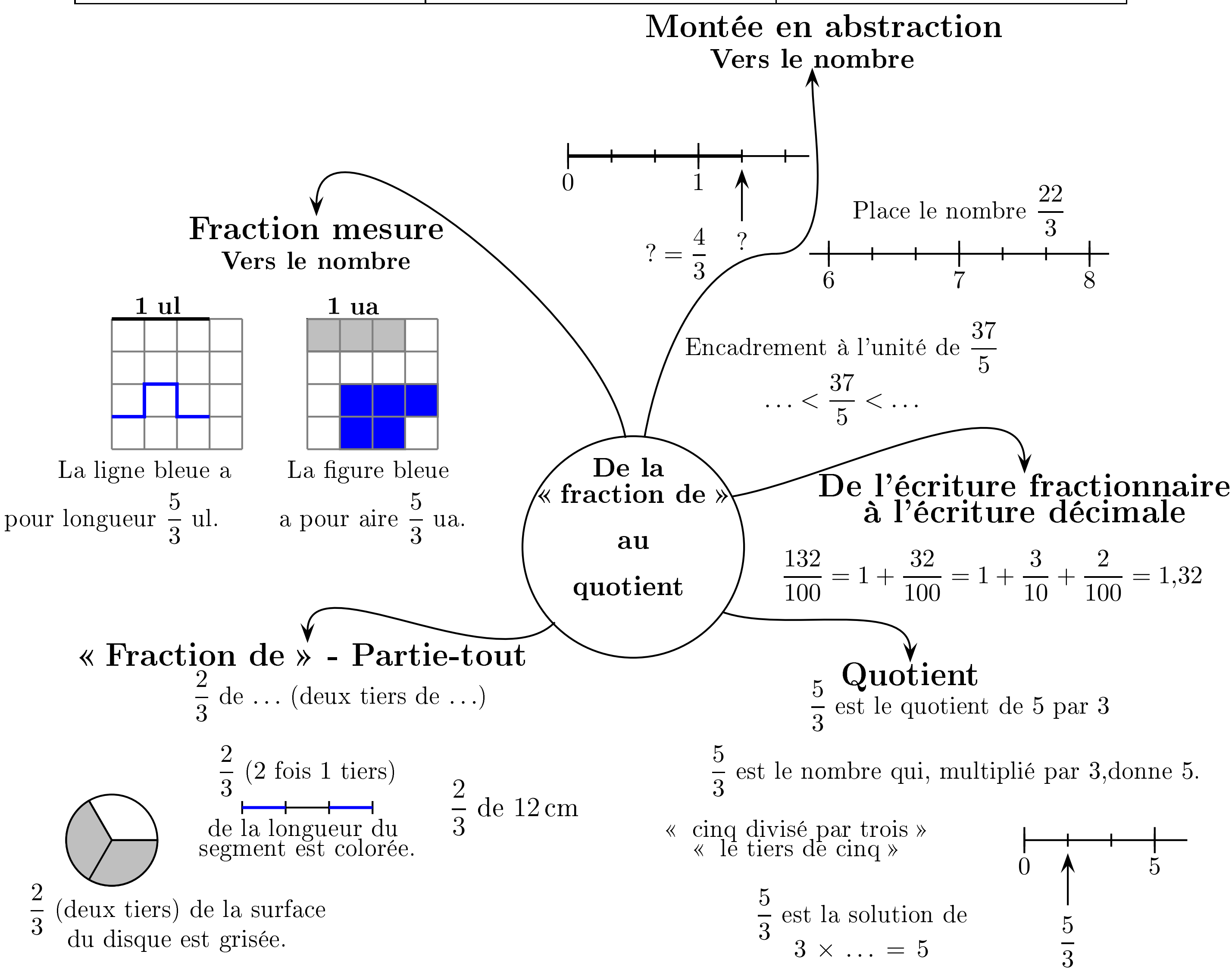
14 octobre 2022

Table des matières

1 Les différents concepts - progression sur le cycle 3

D'après les repères de progression du cycle 3 :

CM1	CM2	Sixième
Dès la **période 1**, les élèves utilisent les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et supérieures à 1. Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1. **Longueur :** Les élèves mesurent des périmètres par report d'unités et de fractions d'unités. **Aire :** Les élèves comparent des surfaces selon leur aire par estimation visuelle, par superposition ou découpage et recollement. Ils estiment des aires, ou les déterminent, en faisant appel à une aire de référence. **Le lien est fait chaque fois que possible avec le travail sur les fractions.**	Dès la **période 1**, dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1\,000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.	En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. En **période 2**, l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes). En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).



Les questions de ce document sont réparties en trois catégories :

1. **La fraction « partie/tout » (inférieure à 1)**

   Il s'agit d'appréhender la fraction comme action de partage égal selon une grandeur donnée. Colorier $\frac{2}{3}$ de l'aire de la surface, c'est partager la surface en 3 parts d'aire égale et en colorier 2.

   La fraction $\frac{2}{3}$ est par définition « 2 fois 1 tiers »

   L'élève comprendra qu'un même partage peut s'exprimer par différentes écritures fractionnaires et appréhendera, essentiellement dans le langage naturel, des opérations sur les fractions (2 fois $\frac{1}{4}$ d'une grandeur correspond à $\frac{1}{2}$ de cette grandeur, le tiers de $\frac{1}{2}$ d'une grandeur correspond à $\frac{1}{6}$ de cette grandeur.

   Dans ces questions, l'écriture fractionnaire conduit à une action de partage d'une grandeur (fraction de) et, dans ce contexte, l'écriture fractionnaire n'est pas perçue comme celle d'un nombre. Cette première conception « partie/tout » de la fraction est naturelle mais inadaptée pour introduire les fractions supérieures à 1.

2. **La fraction « mesure » - Vers le statut de nombre**

   Pour les questions de la deuxième catégorie, la fraction sert à mesurer des longueurs ou des aires à partir d'une unité de référence. On se détache ainsi de l'objet de référence pour en mesurer un autre. Ce passage facilite l'introduction des fractions supérieures à 1 (voir questions 4 et 5 par exemple) puisqu'il est naturel d'obtenir des mesures supérieures à l'unité.

   Dans ce contexte, les fractions enrichissent la famille des nombres qui permettent de mesurer des grandeurs, elles prennent ainsi progressivement le statut de nombre. On écrira que la longueur d'un segment mesure 2 ul (unités de longueur) tout comme on écrira que la longueur d'un segment mesure $\frac{7}{3}$ ul. On dépasse ainsi l'action de partage d'une grandeur, même si,*in fine*, cette conception reste présente à ce stade.

   Lorsque l'élève sera suffisamment familiarisé avec l'écriture fractionnaire comme expression d'une mesure (notamment comme mesure d'une longueur), on pourra monter en abstraction en travaillant sur les axes. On demandera ainsi aux élèves de placer le nombre $\frac{7}{3}$ sur un axe.

3. **L'écriture fractionnaire interprétée comme « quotient » de deux nombres** (classe de sixième)

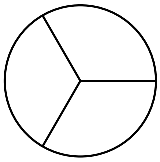
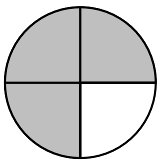
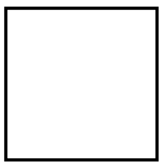
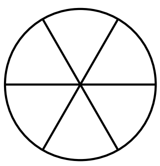
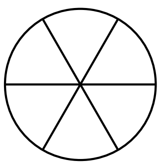
   Cette partie vise à appréhender progressivement l'écriture fractionnaire comme quotient de deux nombres. Les élèves de CM1 et CM2 comprennent l'écriture $\frac{2}{3}$ comme 2 fois $\frac{1}{3}$. En sixième, les élèves appréhenderont également l'écriture $\frac{2}{3}$ comme le quotient de 2 par 3 ($2 \div 3$) ou autrement dit « le tiers de 2 ». Dans cette nouvelle interprétation, l'écriture fractionnaire prend pleinement la dimension de celle d'un nombre.

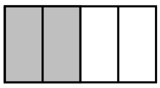
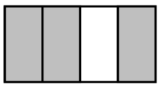
   Certaines questions proposées dans cette partie constituent des activités d'approche pour appréhender progressivement cette nouvelle conception de l'écriture fractionnaire. D'autres entraînent les élèves à « jongler » entre les différentes représentations de l'écriture fractionnaire pour convoquer celle qui est la plus adaptée à la question posée.

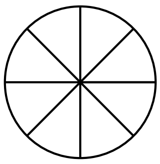
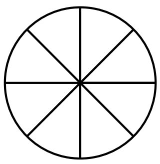
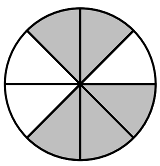
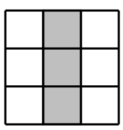
Les questions proposées ne sont évidemment pas exhaustives. L'objectif essentiel est de présenter des questions permettant progressivement de monter en abstraction en convoquant les différentes interprétations de l'écriture fractionnaire et de permettre à l'élève d'appréhender l'écriture fractionnaire comme celle d'un nombre.

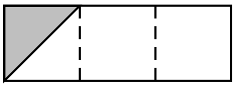
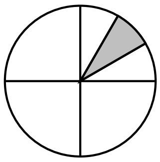
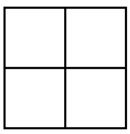
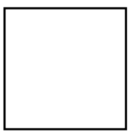
La nature des questions et les commentaires qui y sont adossés éclairent les enjeux didactiques et devraient aider les enseignants à construire une progression de questions « flash » articulées avec la progression des séquences.

2 La fraction « partie/tout »

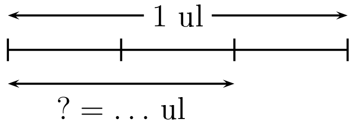
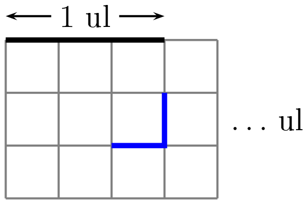
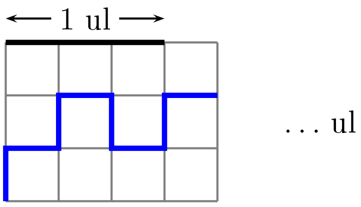
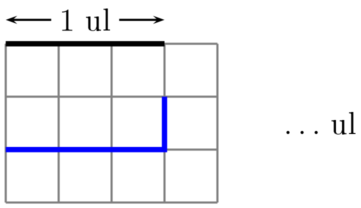
	Énoncé	Commentaires
1	Grise **un tiers** de l'aire de ce disque. 	La compréhension du terme « tiers »est visée.
2	**un tiers** de 12 €	Le partage de 12 en trois ne relève pas ici de la maîtrise de l'opération « division » mais d'automatismes sur les tables ($12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 4$). Ce type de question devrait être posé avant l'étude de la division.
3	Quelle fraction de l'aire du disque est grisée ? 	Il s'agit essentiellement dans cette question de lier « trois quarts » à l'écriture symbolique fractionnaire.
4	Grise **un quart** de l'aire de ce carré. 	On met en évidence différentes procédures de partage pour faire comprendre à l'élève que la fraction d'une grandeur est indépendante du partage choisi.
5	Grise **deux tiers** de l'aire de ce disque. 	L'identification d'un tiers de l'aire du disque n'est pas immédiate ici.
6	Grise $\frac{2}{3}$ de l'aire de ce disque. 	$\frac{2}{3}$ doit être interprété comme « deux tiers »

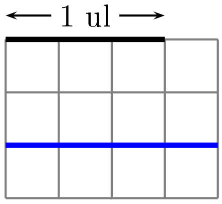
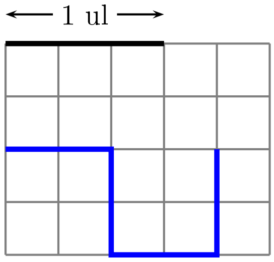
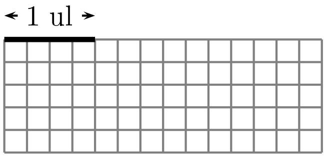
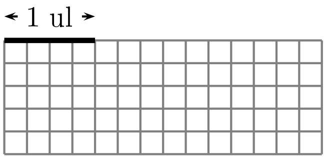
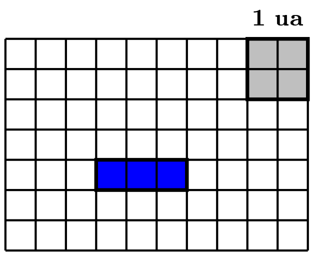
	Énoncé	Commentaires
7	**Deux tiers** de 15 €	En deux étapes : le tiers de 15 € est égal à 5 €. Deux tiers de 15 € est donc égal à 2×5 € = 10 €.
8	$\frac{2}{3}$ de 15 €	
9	Quelle fraction de l'aire du rectangle est grisée ? 	Cette question est l'occasion de rencontrer des fractions égales : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (on s'autorise à utiliser le terme « égal » même si la fraction n'a pas encore le statut de nombre).
10	Quelle fraction de l'aire du rectangle est grisée ? 	Cette question est l'occasion d'aborder sans aucun formalisme l'addition de fractions simples : « deux quarts + un quart = trois quarts »
11	Complète. 13 € est égal à . . . . de 26 €	la moitié ou « un demi » ou $\frac{1}{2}$
12	Complète. 7 m est égal à . . . . de 21 m	« un tiers » ou $\frac{1}{3}$
13	Complète par une fraction. 5 km = ... de 20 km	

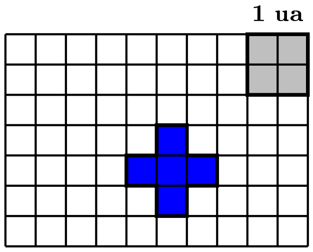
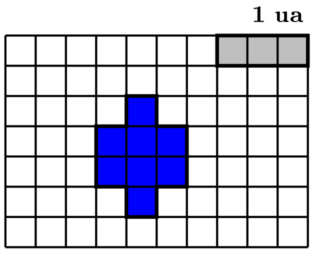
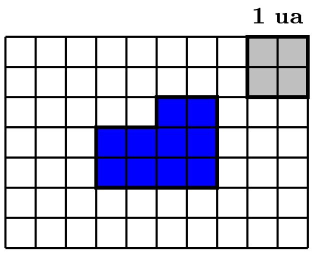
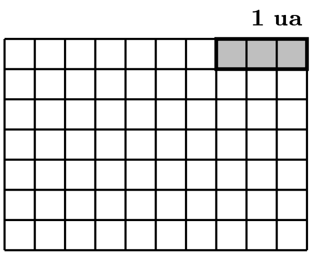
	Énoncé	Commentaires
14	Complète par une fraction. 15 km = ... de 20 km	Cette question fait suite à la question précédente. L'élève doit identifier que 5 est un diviseur commun à 15 et à 20.
15	**Deux cinquièmes** de 15 €	La terminologie en « ième » n'est pas présente dans les fractions appelées communément simples. Elle mérite un travail spécifique.
16	Grise **trois huitièmes** de l'aire du disque. 	
17	Grise $\frac{3}{8}$ de l'aire du disque. 	
18	Quelle fraction de l'aire du disque est grisée ? 	Cette question est l'occasion d'appréhender sans formalisme l'addition de fractions (« deux huitièmes + trois huitièmes = cinq huitièmes).
19	Quelle fraction de l'aire du rectangle est grisée ? 	Cette question est l'occasion de mettre en évidence des fractions égales $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (trois neuvièmes est égal à un tiers).

	Énoncé	Commentaires
20	Quelle fraction de l'aire du rectangle est grisée ? 	À l'élève de concevoir la surface partagée en 6 parts de même aire. On pourra mettre en évidence que la moitié de $\frac{1}{3}$ est égale à $\frac{1}{6}$.
21	Quelle fraction de l'aire du disque est grisée ? 	À l'élève de concevoir la surface partagée en 12 parts de même aire. On pourra mettre en évidence que le tiers de $\frac{1}{4}$ est égal à $\frac{1}{12}$.
22	Complète par une fraction. Le tiers de la moitié de l'aire d'une surface est égal à . . . . . . de cette aire.	On attend ici que l'élève représente la situation.
23	Grise $\frac{3}{8}$ de l'aire de ce carré. 	
24	Grise $\frac{3}{8}$ de l'aire de ce carré. 	

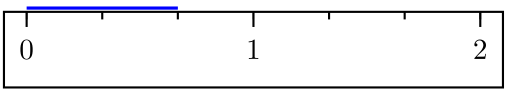
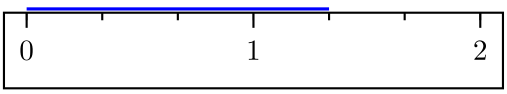
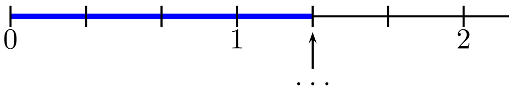
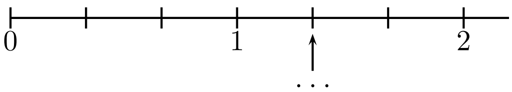
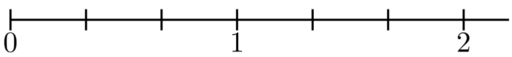
3 La fraction « mesure » - Vers le statut de nombre

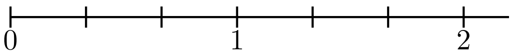
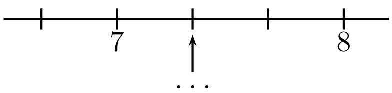
	Énoncé	Commentaires
1	Quelle fraction de la longueur du segment est coloriée en bleu ? 	La fraction $\frac{2}{3}$ a ici le statut « partie-tout » et agit sur la grandeur : $\frac{2}{3}$ de la longueur du segment.
2	Complète. 	La fraction $\frac{2}{3}$ agit toujours sur la longueur du segment mais elle donne ici la mesure d'une longueur. Pour les élèves, les longueurs étant mesurés par des nombres, la fraction prend également le statut de nombre par extension.
3	Quelle est la longueur de la ligne bleue ? 	On mesure la longueur d'un objet géométrique distinct et de nature différente de celui définissant l'unité de référence. La fraction prend ainsi davantage le statut de nombre qui exprime la mesure de la longueur d'une ligne à partir d'une unité de référence détachée de cette ligne.
4	Quelle est la longueur de la ligne bleue ? 	L'unité de référence étant définie, il est bien plus aisé et naturel d'introduire dans ce contexte les fractions supérieures à 1. La ligne choisie invite à la réponse $\frac{8}{3}$ ul. D'autres réponses sont également à mettre en exergue ($2+\frac{2}{3}$ ul notamment).
5	Quelle est la longueur de la ligne bleue ? 	La ligne choisie favorise la réponse $1+\frac{1}{3}$ ul. On mettra en avant différente représentation de ce nombre ($1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$).

	Énoncé	Commentaires
6	Quelle est la longueur de la ligne bleue ?  . . . ul	La nature de la ligne choisie dans les questions 4, 5 et 6 influence les réponses des élèves. $1 + \frac{1}{3}$ est une réponse tout aussi valable que $\frac{4}{3}$! L'important est de présenter les différentes stratégies et réponses (et de déconstruire les erreurs).
7	Quelle est la longueur de la ligne bleue ?  . . . ul	La ligne choisie invite au calcul $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. On ne dégagera pas de règles opératoires mais les opérations non formalisées sur les fractions participent à leur compréhension et faciliteront l'institutionnalisation de règles opératoires au cycle 4.
8	Trace un segment de longueur $2 + \frac{3}{4}$ ul. 	Á l'élève de tracer une ligne de longueur donnée ! On diversifie le questionnement par une question « manipulatoire ».
9	Trace un segment de longueur $\frac{11}{4}$ ul. 	
10	Quelle est l'aire de la figure bleue ?  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	Dans les questions suivantes, la fraction est la mesure d'une aire. Elles visent, dans un contexte différent, les mêmes apprentissages sur les fractions que lorsque celles-ci sont des mesures de longueurs.

	Énoncé	Commentaires
11	Quelle est l'aire de la figure bleue ?  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	$1 + \frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$
12	Quelle est l'aire de la figure bleue ?  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	$2 + \frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{3}$
13	Quelle est l'aire de la figure bleue ?  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	De nombreuses réponses possibles : $2 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
14	Trace une figure d'aire $\frac{11}{3}$ ua. 	On diversifie le questionnement. Á l'élève de tracer une figure d'aire donnée !

Exemples de questions sur le thème « **Fraction nombre (Montée en abstraction)** »

	Énoncé	**Commentaires**
1	Quelle est la longueur du segment bleu mesurée avec cette règle ? 	L'unité de longueur est définie par la règle. La règle est un objet usuel et familier de mesure d'une longueur. Le recours à cette règle particulière conforte la fraction comme nombre mesurant une longueur. Ici le segment mesure $\frac{2}{3}$ ul.
2	Quelle est la longueur du segment bleu mesurée avec cette règle ? 	
3	Complète. 	Ce type de question fait le lien entre le nombre qui représente la mesure de la longueur du segment bleu et ce même nombre qui repère un point de l'axe.
4	Complète. 	Le segment n'est plus tracé. Seuls les nombres sont considérés.
5	Place le nombre $1 + \frac{2}{3}$. 	

	Énoncé	Commentaires
6	Place le nombre $\dfrac{4}{3}$. 	
7	Complète. $1 + \ldots = \dfrac{5}{3}$	Cette question convoque $1 = \dfrac{3}{3}$.
8	Combien de fois $\dfrac{1}{3}$ dans 4 ?	Un axe peut servir de support à cette question.
9	Complète par une fraction. 	L'élève doit d'abord établir que $7 = \dfrac{21}{3}$. Il peut compter de $\dfrac{3}{3}$ en $\dfrac{3}{3}$ ou de manière plus experte : « 7 fois trois tiers est égal à 21 tiers. » Les deux questions précédentes pourront être proposées en amont.

4 De l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale

Les questions qui suivent s'inscrivent dans la continuité des questions posées sur les fractions. Le travail sur la compréhension des fractions décimales, sur le lien entre les différentes unités (10 centièmes est égal à 1 dixième,...) et les différentes représentations d'un nombre décimal sous la forme de sommes de fractions décimales $\left(\dfrac{324}{100} = 3 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{4}{100} = 3 + \dfrac{24}{100}\right)$ constituent un préalable avant l'introduction de la virgule dans l'écriture décimale.

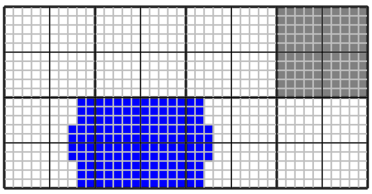
Les questions posées ci-après sont variées et convoquent de multiples représentations du nombre décimal :

— **Représentations discursives :**
2 unités 3 dixièmes= 23 dixièmes
(les différentes représentations discursives constituent autant de représentations différentes du nombre décimal.)

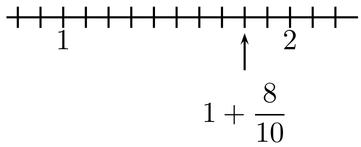
— **Représentations fractionnaires :**
$1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{8}{100} = \dfrac{14}{10} + \dfrac{8}{100} = \dfrac{148}{100} \ldots$
(les représentations fractionnaires doivent être accompagnées d'une lecture discursive (1 unité 48 centièmes par exemple).

— **Représentation « graphique »**

1 ua



L'aire de la figure bleue est égale à $1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{8}{100}$ ua $= 1 + \dfrac{48}{100}$ ua ...



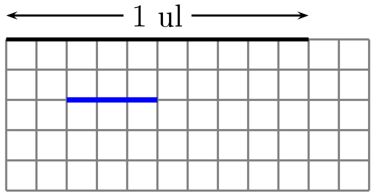
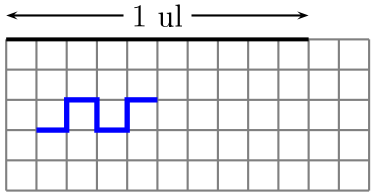
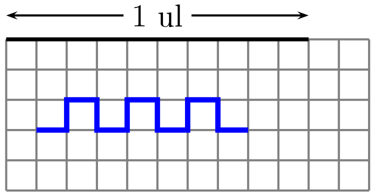
— **Représentation dans un tableau de numération :**

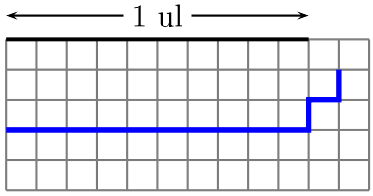
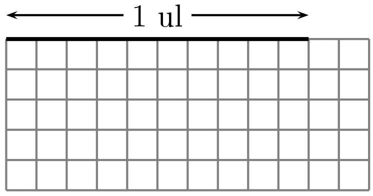
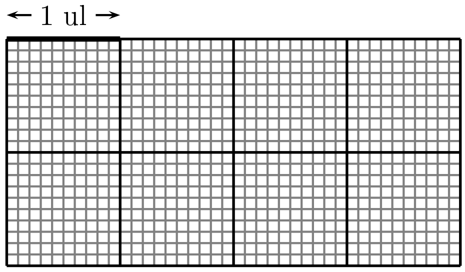
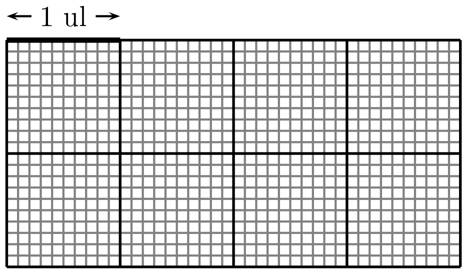
	milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	
				1	4	8		

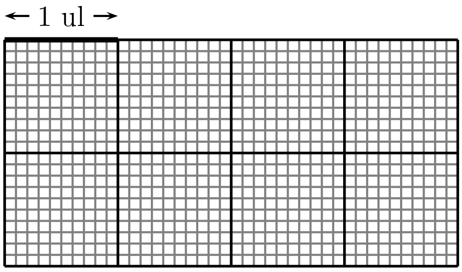
Cette représentation favorise différentes lectures du nombre décimal.
1 unité 48 centièmes, 14 dixièmes 8 centièmes, 148 centièmes. Le placement de la virgule dans le tableau de numération n'a pas d'intérêt. C'est lorsque l'écriture du nombre « sort » du tableau qu'il est nécessaire de préciser quel est le chiffre des unités par une virgule. Cette représentation évite de dissocier le nombre décimal en deux parties.
Le glisse-nombre est un tableau de numération dynamique qui permettra de faire glisser le nombre lorsqu'il est multiplié ou divisé par 10, 100, 1000...

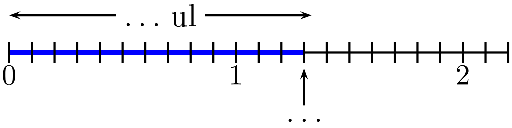
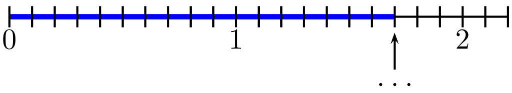
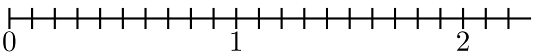
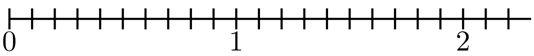
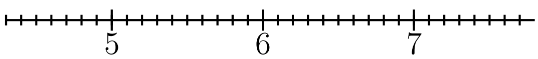
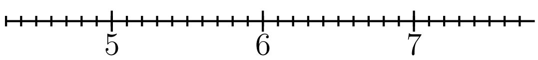
— **Écriture décimale (un écueil didactique)**

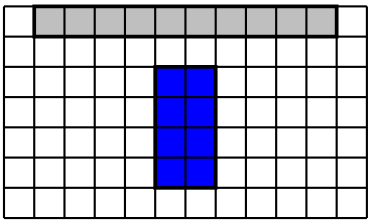
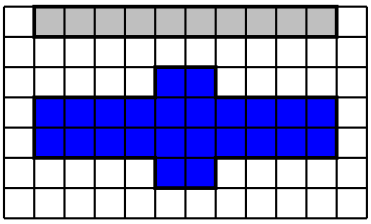
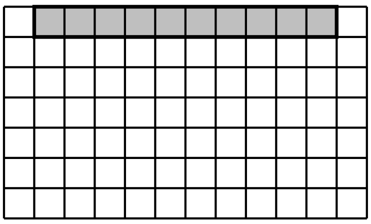
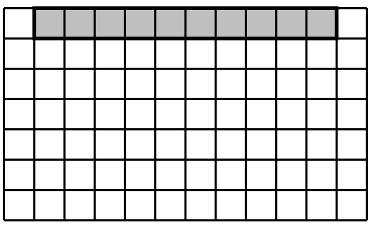
L'écriture décimale conduit de très nombreux élèves à considérer le nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule. Cette perception génère de très nombreuses erreurs liées à des extensions d'automatismes sur les opérations sur les entiers ($3{,}7 \times 10 = 3{,}70$ ou $30{,}70$, $0{,}7 + 0{,}6 = 0{,}13$ ...).
Tant que le concept de nombre décimal est en construction, il est important de varier les représentations du nombre notamment en utilisant le registre discursif 1,48 se lit « 1 unité 48 centièmes » ou 148 centièmes et non « 1 virgule 48 ».

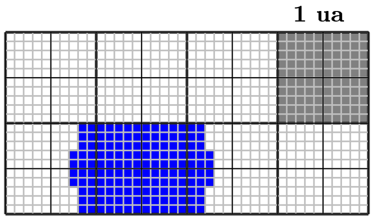
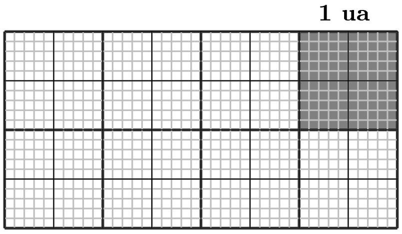
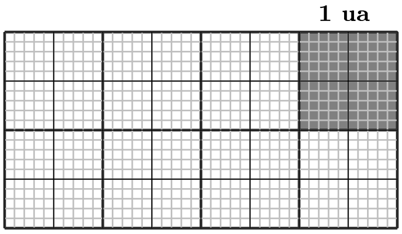
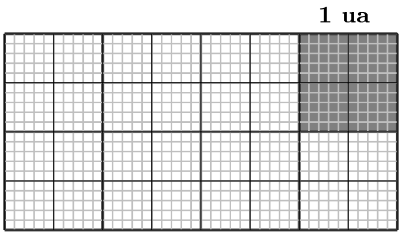
	Énoncé	Commentaires
1	Quelle est la longueur du segment bleu ?  . . . ul	
2	Quelle est la longueur de la ligne bleue ?  . . . ul	On mesure la longueur d'un objet géométrique distinct et de nature différente de celui définissant l'unité de référence.
3	Quelle est la longueur de la ligne bleue ?  . . . ul	Exprimer une mesure avec une fraction supérieure à 1 est naturel dans ce contexte.

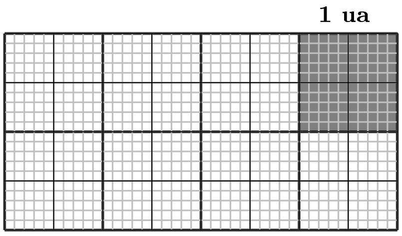
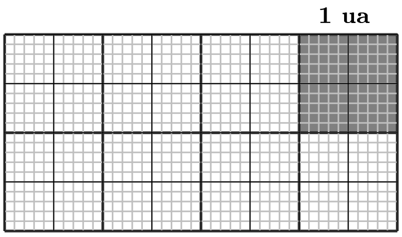
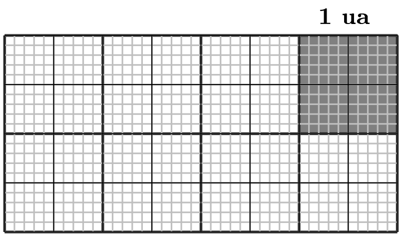
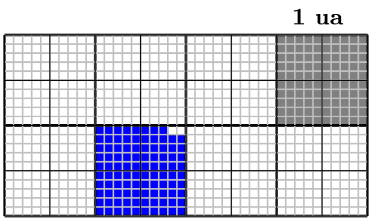
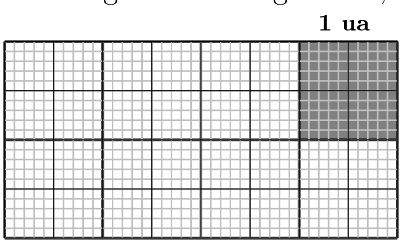
	Énoncé	Commentaires
4	Quelle est la longueur de la ligne bleue ?  … ul	Mise en exergue des deux réponses $1 + \frac{3}{10}$ et $\frac{13}{10}$ et du « passage » de l'une à l'autre.
5	Trace une ligne de longueur $\frac{7}{10}$ ul. 	
6	Trace une ligne de longueur $3 + \frac{4}{10}$ ul. 	
7	Trace une ligne de longueur $\frac{34}{10}$ ul. 	

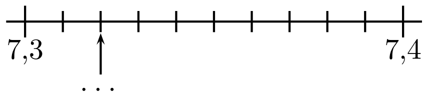
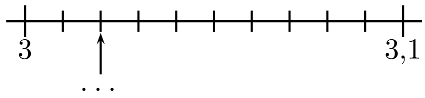
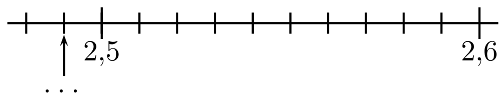
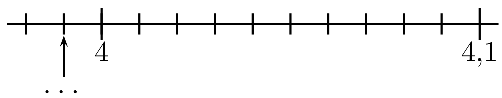
	Énoncé	Commentaires
8	Trace une ligne de longueur 3,4 ul. 	
9	Complète. $2+\frac{3}{10}=\frac{\dots}{10}$	Le recours à une représentation graphique (segment de longueur $2+\frac{3}{10}$ ul) pourra constituer une aide ou servir d'appui pour la correction.
10	Décompose sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1. $\frac{63}{10}=\dots+\dots$	
11	Écriture décimale de $3+\frac{7}{10}$	
12	Écriture décimale de 23 dixièmes.	
13	Donne deux autres écritures du nombre $\frac{57}{10}$	
14	Écriture décimale de $\frac{3}{10}+2$	
15	Écriture décimale de $1+\frac{17}{10}$	

	Énoncé	**Commentaires**
16	Complète. 	$1+\dfrac{3}{10}$ ul ou $\dfrac{13}{10}$ ul ou 1,3 ul. Cette question met en exergue que le nombre qui repère le point de la droite graduée est la distance entre l'origine de la droite graduée et ce point.
17	Complète. 	
18	Place le nombre $1+\dfrac{3}{10}$. 	
19	Place le nombre $\dfrac{17}{10}$. 	
20	Place le nombre $\dfrac{68}{10}$. 	
21	Place le nombre 5,4. 	

	Énoncé	Commentaires
22	Quelle est l'aire de la figure bleue ? **1 ua**  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	
23	Quelle est l'aire de la figure bleue ? **1 ua**  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	
24	Trace une figure d'aire $\dfrac{28}{10}$ ua ? **1 ua**  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	
25	Trace une figure d'aire 3,4 ua. **1 ua**  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	

	Énoncé	Commentaires
26	Quelle est l'aire de la figure bleue ?  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	L'introduction des aires avec un carré d'aire unité partagé en 100 carrés identiques étend le travail précédemment effectué sur les unités et les dixièmes aux centièmes. $\mathscr{A} = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{8}{100}$ ua $= \dfrac{148}{100}$ ua $= 1 + \dfrac{48}{100}$ ua Il n'est pas question ici d'évoquer les unités d'aire usuelles (mm^2, cm^2).
27	Trace une figure d'aire égale à $2 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{100}$ ua. 	
28	Trace une figure d'aire égale à $1 + \dfrac{43}{100}$ ua. 	
29	Trace une figure d'aire égale à $\dfrac{214}{100}$ ua. 	

	Énoncé	Commentaires
30	Trace une figure d'aire égale à 2,57 ua. 	2,57 se lit « 2 unités 57 centièmes » ou « 257 centièmes » ou « 2 unités 5 dixièmes et 7 centièmes », ce qui se traduit aussi symboliquement par : $2{,}57 = 2 + \frac{57}{100} = \frac{257}{100} = 2 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$
31	Trace une figure d'aire égale à 3,2 ua. 	
32	Trace une figure d'aire égale à 3,02 ua. 	
33	Quelle est l'aire de la figure bleue ?  $\mathscr{A} = \ldots$ ua	On mettre en exergue la stratégie qui conduit à retrancher 2 centièmes à 1 unité. Celle-ci convoque la connaissance « 1 unité = 100 centièmes » qui doit devenir un fait numérique mémorisé.
34	Trace une figure d'aire égale à 0,25 ua. 	La représentation de ce nombre comme somme de $\frac{2}{10}$ et de $\frac{5}{100}$ conduira de nombreux élèves à tracer une figure composée de 2 lignes de 10 carrés d'aire $\frac{2}{10}$ ua et de la moitié d'une ligne d'aire $\frac{5}{100}$ ua. On mettre en évidence que $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et un tracé de figure pour laquelle il est explicite que son aire est égale au quart de l'unité. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ doit progressivement devenir un fait numérique mémorisé.

	Énoncé	Commentaires
35	Complète en donnant une écriture décimale.  	
36	Complète en donnant une écriture décimale.  	
37	Complète en donnant une écriture décimale.  	
38	Complète en donnant une écriture décimale.  	

5 Opérations sur les décimaux

Les opérations participent pleinement à la compréhension des nombres décimaux à condition de ne pas enfermer les élèves dans des algorithmes opératoires ou diverses recettes qui ne font pas sens. À ce stade, un travail conséquent doit avoir été effectué sur le système de numération décimale en ayant privilégié une diversité de représentations du nombre décimal et des changements de représentation.

	Énoncé	Commentaires
1	0,7 + 0,6	La réponse 0,13 est liée à la conception du nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule. **Déconstruction de l'erreur :** Faire comprendre que 0,13 ne peut pas être le résultat, puisqu'inférieur à 0,6. Deux changements de registre permettent de traiter l'erreur : le déplacement sur un axe gradué de 0,7 puis de 0,6 montre qu'on dépasse l'unité. Le recours à la langue naturelle permet d'oraliser le calcul et de convoquer le sens de l'écriture décimale : sept dixièmes plus six dixièmes donnent treize dixièmes, soit une unité et trois dixièmes c-à-d 1,3. On pourra faire comprendre aux élèves que la réponse 0,13 correspond au calcul $0{,}07 + 0{,}06$.
2	0,17 + 0,6	**Déconstruction de l'erreur liée à la réponse 0,23 :** L'utilisation de la langue naturelle permet d'oraliser le calcul : dix-sept centièmes plus six dixièmes ne peuvent pas donner 23 centièmes. Les centièmes s'ajoutent aux centièmes. Un dixième c'est dix centièmes donc six dixièmes c'est soixante centièmes, d'où le résultat soixante-dix centièmes. On pourra faire comprendre aux élèves que la réponse 0,23 correspond au calcul $0{,}17 + 0{,}06$.
3	3,3 − 1,7	**Déconstruction de l'erreur liée à la réponse 2,4 :** on travaillera dans un premier temps, sur le sens de la soustraction : 2,4+1,7 est égal à 4,1, et non à 3,3. Les dixièmes se soustrayant aux dixièmes, on amènera l'élève à voir le calcul comme 33 dixièmes $-$ 17 dixièmes.
4	2 − 0,4	

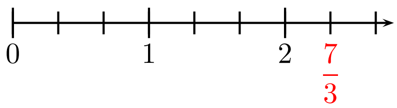
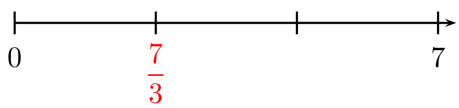
	Énoncé	Commentaires
5	Ajouter **1 dixième** à 3,91.	**Méthode 1 :** On ajoute des centièmes aux centièmes, 10 centièmes + 391 centièmes est égal à 401 centièmes qui s'écrit 4,01. **Méthode 2 :** On obtient 3 unités et 10 dixièmes (= 1 unité) et 1 centième donc 4 unités et 1 centième. Ce qui s'écrit 4,01. **Méthode 3 :** 3,91 c'est 39 dixièmes et 1 centième. En ajoutant 1 dixième, obtient 40 dixièmes et 1 centième. Ce qui s'écrit 4,01.
6	$10 \times 0{,}6$	10 fois 1 dixième est égal à 10 dixièmes donc égal à 1 unité. 10 fois 6 dixièmes est donc égal à 6 unités.
7	$10 \times 0{,}83$	**Méthode 1 :** 10 fois 1 centième est égal à 1 dixième, donc 10 fois 83 centièmes est égal à 83 dixièmes. Ce qui s'écrit 8,3. Cette méthode conduit à déplacer l'écriture décimale du nombre entier 83 d'un rang vers la gauche à l'aide du glisse-nombre (10× 83 centièmes est égal à 83 dixièmes) **Méthode 2 :** 10 fois (8 dixièmes plus 3 centièmes) est égal 10 fois 8 dixièmes plus 10 fois 3 centièmes, ce qui est égal à 8 unités et 3 dixièmes c-à-d 8,3. Cette méthode conduit à déplacer chacun des chiffres du nombre 0,83 d'un rang vers la gauche à l'aide du glisse-nombre lorsque celui-ci est multiplié par 10.
8	Le double de 0,7	Le double de 7 dixièmes est égal à 14 dixièmes c-à-d 1,4. L'erreur liée à la réponse 0,14 sera à déconstruire.
9	$2 \times 0{,}7$	
10	$0{,}7 \times 2$	$0{,}7 \times 2 = 2 \times 0{,}7$.
11	La moitié de 1	Le double de 0,5 est égal à 1, la moitié de 1 est égal à 0,5 doivent être réactivés régulièrement pour devenir des faits numériques mémorisés.
12	La moitié de 0,1	La moitié de 1 dixième est égal à la moitié de 10 centièmes c-à-d 5 centièmes ce qui s'écrit 0,05.
13	$4 \times 0{,}25$	4 fois 25 centièmes est égal à 100 centièmes c-à-d 1 unité. $4 \times 0{,}25 = 1$, le quart de 1 est égal 0,25 doivent être réactivés régulièrement pour devenir des faits numériques.

	Énoncé	Commentaires
14	La moitié de 1,6	La moitié de 16 dixièmes
15	Le tiers de 1,2	Le tiers de 12 dixièmes est égal à 4 dixièmes c-à-d 0,4.
16	La moitié de 4,12	C'est une question « pousse au crime » qui vise à inhiber des automatismes erronées liées à la conception du nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule. 2,6 ne peut pas être la bonne réponse puisque le double de 2,6 est supérieur à 5 ($2{,}6 > 2{,}5$). **Méthode 1 :** La moitié de 412 centièmes est égal à 206 centièmes c-à-d 2,06. **Méthode 2 :** 4,12 c'est 4 unités et 12 centièmes. La moitié de 4 unités est égal à 2 unités. La moitié de 12 centièmes est égal à 6 centièmes. La moitié de 4 unités et 12 centièmes est donc 2 unités et 6 centièmes ce qui s'écrit aussi 2,06.
17	$3{,}2 \div 2$	32 dixièmes $\div\, 2$
18	$2{,}1 \div 3$	21 dixièmes $\div\, 3$

	Énoncé	Commentaires
19	0,1 $\div$ 10	0,1 $\div$ 10 est égal au dixième d'un dixième donc à un centième c-à-d 0,01.
20	3,42 $\div$ 10	**Méthode 1 :** 3,42 c'est 342 centièmes. 1 centième divisé par 10 est égal à 1 millième donc le nombre 342 centièmes divisé par 10 est égal 342 millièmes c-à-d 0,342. Cette méthode explique que diviser un nombre par 10 revient à décaler l'écriture décimale du nombre d'un rang vers la droite avec le glisse-nombre lorsqu'on le divise par 10. **Méthode 2 :** 3,42 c'est 3 unités, 4 dixièmes et 2 centièmes. 3,42 $\div$ 10 est égal 3 unités divisées par 10, 4 dixièmes divisés par 10 et 2 centièmes divisés par 10 donc à 3 dixièmes, 4 centièmes et 2 millièmes. Cette méthode explique que diviser un nombre par 10 revient à décaler chacun des chiffres de l'écriture du nombre d'un rang vers la droite avec le glisse-nombre.
21	Exemples d'équations : Complète. 3,6 + ... = 4 ...... + 1,07 = 2 2,4 − ...... = 2,31 2 − ...... = 1,02 2 × ...... = 3,2 ...... × 4 = 1 10 × ...... = 3,42 ...... $\div$ 100 = 1,543	Poser des questions similaires dans le cadre des équations diversifie le questionnement et permet un travail sur les opérations réciproques.

6 L'écriture fractionnaire interprétée comme quotient de deux nombres (en sixième et après)

En CM1/CM2, l'écriture fractionnaire $\dfrac{7}{3}$ est exclusivement considérée comme « sept tiers » (ou autrement dit 7 fois un tiers). En sixième, généralement assez tardivement dans l'année, les élèves verront que $\dfrac{7}{3}$ est aussi le quotient de 7 par 3 c-à-d le nombre qui multiplié par 3 donne 7, ou exprimé différemment le nombre « 7 divisé par 3 » ou encore le tiers de 7).
Ils auront ainsi une nouvelle manière d'appréhender l'écriture fractionnaire.
L'écriture fractionnaire interprétée comme quotient de deux nombres est difficile pour les élèves. Une rencontre régulière de cette nouvelle conception, tout au long du cycle 4, est nécessaire pour permettre aux élèves de l'assimiler et d'automatiser le choix de la représentation de l'écriture fractionnaire qui convient à la situation.
Les questions ci-après privilégient un travail sur différents registres :

	Conception initiale	**Nouvelle conception**
Registre langagier	« sept tiers » ou « sept fois un tiers »	Le quotient de 7 par 3, le nombre qui multiplié par 3 donne 7, le nombre égal à 7 divisé par 3, le tiers de sept.
Registre de la droite graduée		
« Registre » des équations à trou		$\dfrac{7}{3}$ est la solution de : $3 \times \ldots\ldots = 7$

Les élèves devront donc être familiarisés avec le registre des équations à trou avant d'aborder cette nouvelle interprétation de l'écriture fractionnaire.
Les deux interprétations de l'écriture fractionnaire se rejoignent pour les fractions dont le numérateur est égal à 1 (fractions unaires). En effet $\dfrac{1}{3}$ est indifféremment « un tiers » (implicitement de l'unité) ou « le tiers de un ».
L'interprétation de $\dfrac{1}{3}$ par l'expression le « le tiers de un » correspond à celle du quotient de 1 par 3 (« le tiers de un » est associé au nombre $1 \div 3$ ou au nombre qui multiplié par 3 donne 1.
C'est pourquoi il est proposé, dans un premier temps, d'appréhender avec les fractions unaires cette nouvelle conception de l'écriture fractionnaire comme quotient de deux nombres, puis dans un second temps, de la généraliser aux écritures fractionnaires quelconques.
Dans la progression de questions « flash » illustrée par les exemples ci-après, trois étapes sont mises en exergue :

1. Les questions de la première partie convoquent les registres de la droite graduée et des équations à trou. Elles visent le recours à la division pour repérer un point sur l'axe graduée ou pour déterminer la solution d'une équation à trou « produit ».
2. Les questions de la deuxième partie portent sur les fractions unaires et visent l'interprétation des fractions unaires comme quotient de deux nombres. Une diversité de formulations est convoquée

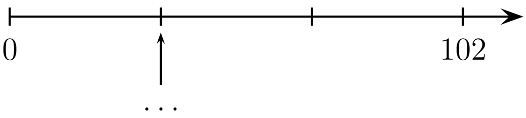
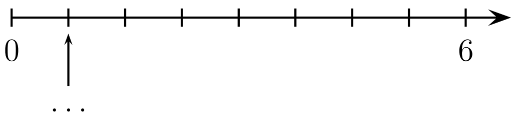
($\frac{1}{3}$ est le tiers de 1 ou le nombre $1 \div 3$ ou le nombre qui multiplié par 3 donne 1). Ces différentes formulations sont interprétées et visualisées dans différents registres (droite graduée, équation à trou « produit ») pour appréhender pleinement et sous différents angles le quotient de deux nombres.

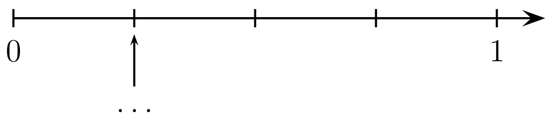
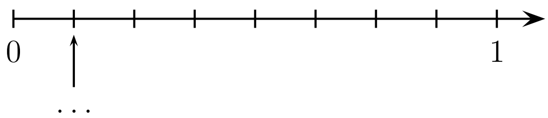
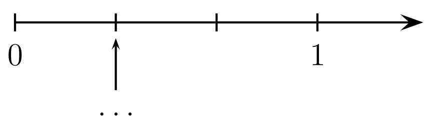
3. Lorsque les élèves auront été suffisamment familiarisés avec ces diverses interprétations et ces changements de registre avec les fractions unaires, la généralisation aux autres écritures fractionnaires s'effectuera en proposant un raisonnement de proportionnalité : « Le tiers de 1 est $\frac{1}{3}$ (lu "un tiers") donc le tiers de 2 est $\frac{2}{3}$ (lu "deux tiers"). »
   L'écriture $\frac{2}{3}$ est interprétée comme « le tiers de 2 », ou autrement dit, comme le nombre $2 \div 3$ ou le nombre qui multiplié par 3 donne 2 c-à-d le quotient de 2 par 3.

Cette manière d'appréhender l'interprétation de l'écriture fractionnaire comme quotient de deux nombres doit être mise en œuvre sur une longue durée en sixième. Il est tout à fait envisageable d'engager la démarche présentée ici tôt dans l'année scolaire.

L'interprétation de l'écriture fractionnaire comme quotient de deux nombres doit être réactivée régulièrement tout au long du cycle 4 afin de :

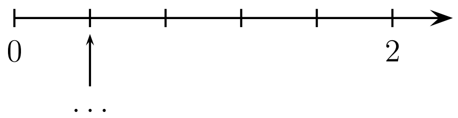
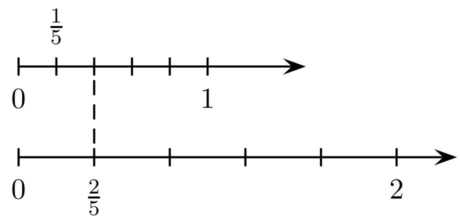
- laisser le temps aux élèves d'assimiler cette nouvelle interprétation de l'écriture fractionnaire ;
- d'automatiser le choix d'interprétation de l'écriture fractionnaire en fonction de la situation (exemple : l'écriture $\frac{21}{4}$ interprétée comme « vingt-et-un quarts » (conception initiale) ou comme « le quart de 21 » ou exprimée autrement « le nombre égal à $21 \div 4$ » ou encore « le nombre qui multiplié par 4 donne 21 »).

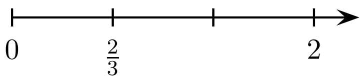
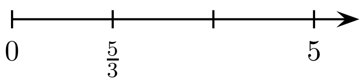
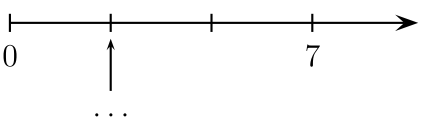
	Énoncé	Commentaires
1	Complète. $3 \times \ldots = 1\,521$	On met en évidence avec ce type de question que l'opération réciproque de la multiplication est la division et que le nombre cherché est $1\,521 \div 3 = 507$. Il n'est pas question d'introduire à ce stade l'écriture fractionnaire $\dfrac{1\,521}{3}$ qui ne peut pas encore être comprise comme $1\,521 \div 3$.
2	Complète.  	Le nombre cherché est le tiers de 102 c-à-d $102 \div 3 = 34$. On pourra aussi mettre en avant que 34 est solution de l'équation $3 \times \ldots = 102$.
3	Complète.  	Le recours à la division est plus difficile dans cette situation (le dividende est inférieur au diviseur). La stratégie qui consiste à repérer, sur la droite graduée, le nombre 3 puis 1,5 puis 0,75 peut être engagée. Lors de la correction, on institutionnalise que le nombre cherché est le huitième de 6 c-à-d $6 \div 8 = 0{,}75$. On met également en évidence que ce nombre est solution de l'équation $8 \times \ldots = 6$.
4	Complète. $8 \times \ldots = 5$	Plusieurs stratégies sont possibles. Le nombre cherché est $5 \div 8 = 0{,}125$. Le fait que la multiplication du nombre cherché par 8 donne un nombre plus petit que 8 est encore une difficulté pour bon nombre d'élèves. Le recours à une opération de division correcte $(5 \div 8)$ est plus difficile dans ce contexte. On pourra convoquer le registre de la droite graduée lors de la correction.

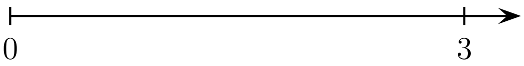
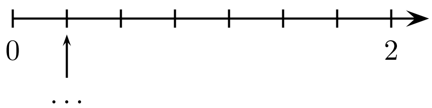
<table>
<tr><th></th><th>Énoncé</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>5</td><td>Complète.
</td><td>Les réponses correctes attendues sont 0,25 et $\frac{1}{4}$.
On mettra en évidence que le nombre cherché est le quart de 1.
Le quart de 1 c'est $1 \div 4$, mais c'est aussi $\frac{1}{4}$ (un quart). On interprète ainsi l'écriture fractionnaire $\frac{1}{4}$ comme le quart de 1 ou le nombre $1 \div 4$ (interprétation « quotient » de l'écriture fractionnaire).
On peut aussi mettre en évidence que $\frac{1}{4}$ est la solution de l'équation $4 \times \ldots = 1$ autrement dit le nombre qui multiplié par 4 donne 1.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Complète.
$5 \times \ldots = 1$</td><td>Les réponses correctes attendues sont 0,2 et $\frac{1}{5}$.
On met en exergue l'écriture fractionnaire $\frac{1}{5}$ de la solution.
La solution de cette équation est le nombre $1 \div 5 = 0{,}2$ mais aussi le cinquième de 1 qui s'écrit également $\frac{1}{5}$.
$\frac{1}{5}$ est le nombre qui multiplié par 5 donne 1.
On interprète cette question dans le registre de la droite graduée.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Complète.
</td><td>Le nombre cherché est $\frac{1}{8}$.
C'est aussi $1 \div 8 = 0{,}125$.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Donne deux écritures du nombre égal au quart de 1.</td><td>Réponses correctes attendues : $\frac{1}{4}$, 0,25.
On s'appuie sur le registre de la droite graduée pour la correction.
Le quart de 1 est $\frac{1}{4}$ qui est égal à $1 \div 4 = 0{,}25$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Complète.
</td><td>Le nombre cherché est $\frac{1}{3}$, c'est aussi le tiers de 1 ou le nombre $1 \div 3$. $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal (à justifier). On donnera cependant une valeur approchée du nombre $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ au centième près).</td></tr>
</table>

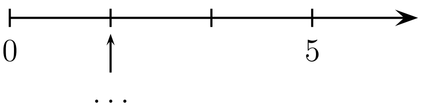
	Énoncé	Commentaires
10	Complète. $7 \times \ldots = 1$	Le nombre cherché est le nombre $1 \div 7$ qui n'est pas un nombre décimal. Le nombre cherché est le septième de l'unité, il peut aussi s'écrire $\frac{1}{7}$ (on s'appuiera sur le registre de la droite graduée). La solution est donc le nombre $\frac{1}{7}$ dont une valeur approchée au centième est 0,14 (obtenue par la mise en œuvre de l'algorithme de la division de 1 par 7).
11	Complète. Le tiers de 1 est égal à ….	Le tiers de 1 est égal à $\frac{1}{3}$ (un tiers). On s'appuie sur le registre de la droite graduée.
12	Complète. Le septième de 1 est égal à ….	Le septième de 1 est égal à $\frac{1}{7}$ (un septième). On s'appuie sur le registre de la droite graduée.

Généralisation aux autres écritures fractionnaires de l'interprétation comme quotient de deux nombres

	Énoncé	Commentaires
13	Complète. 	Le travail mené à travers des questions similaires à celles de la série 1 devrait faciliter le recours à la division. Le nombre cherché est $2 \div 5 = 0{,}4$. Il est fort à parier que certains élèves répondent $\frac{1}{5}$. Après avoir déconstruit l'erreur, le professeur peut s'y appuyer pour mettre en exergue une autre écriture du nombre cherché à partir du raisonnement de proportionnalité suivant : « Le cinquième de 1 est $\frac{1}{5}$ (un cinquième), donc le cinquième de 2 est le double de $\frac{1}{5}$ c-à-d $\frac{2}{5}$ (deux cinquièmes). » On accompagne ce raisonnement de l'illustration suivante :  Ainsi $\frac{2}{5}$ est le cinquième de 2, c-à-d le nombre égal à $2 \div 5$ $(= 0{,}4)$.

	Énoncé	**Commentaires**
14	Complète. Le tiers de 1 est … donc le tiers de 2 est ….	On force à travers cette question le raisonnement de proportionnalité expliqué dans le commentaire de la question précédente. « Le tiers de 1 est $\frac{1}{3}$ » aura été travaillé à travers les questions portant sur les fractions unaires. On représente sur la droite graduée : « le tiers de 2 est $\frac{2}{3}$. »  On institutionnalise cette nouvelle interprétation de l'écriture fractionnaire $\frac{2}{3}$ et on l'exprime dans différents registres (droite graduée, équation à trou) : $\frac{2}{3}$ est le tiers de 2 donc le nombre égal à $2 \div 3$. $\frac{2}{3}$ est le tiers de 2 donc le nombre solution de $3 \times \ldots = 2$.
15	Complète. Le tiers de 5 est égal à ….	Le tiers de 5 est égal à $\frac{5}{3}$. On rappelle le raisonnement « le tiers de 1 est $\frac{1}{3}$ donc le tiers de 5 est $\frac{5}{3}$. » On représente l'interprétation de l'écriture fractionnaire $\frac{5}{3}$ comme le tiers de 5 dans le registre de la droite graduée et celui des équations à trou :  $\frac{5}{3}$ est le tiers de 5 c-à-d le nombre $5 \div 3$. $\frac{5}{3}$ est également le nombre solution de $5 \times \ldots = 3$. On justifie que $\frac{5}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Une valeur approchée de $\frac{5}{3}$ au centième près est 1,67.
16	Complète. 	Le tiers de 7 est $\frac{7}{3}$. (voir commentaires de la question précédente).

	Énoncé	**Commentaires**
17	Placer $\dfrac{3}{4}$. 	Plusieurs stratégies sont possibles. On met en avant celle qui consiste à interpréter $\dfrac{3}{4}$ comme le quart de 3 (3 divisé par 4).
18	Complète. $4 \times \ldots = 6$ $8 \times \ldots = 5$ $7 \times \ldots = 2$	Cette série de questions convoque le « registre » des équations. Les équations permettent de conforter à la fois le statut de nombre de la fraction et de conforter l'interprétation de l'écriture fractionnaire comme quotient d'un entier par un autre non nul. La solution de la première équation peut être trouvée par tâtonnement. Celle de la deuxième équation est plus délicate à trouver. Le recours à la division (opération réciproque de la multiplication) sera sans doute nécessaire et sera mis en exergue. La solution de la troisième équation n'est pas un nombre décimal. Le changement de registre de cette question et le statut de nombre de la fraction encore en cours de construction font que de nombreux élèves ne feront pas le lien avec la fraction quotient introduite dans les précédentes questions. La convocation du registre de la droite graduée constitue une aide adéquate.  Lors de la phase de synthèse, on insiste sur les différentes représentations de chacune des solutions : La solution de la première équation est le quart de 6 c-à-d le nombre $\dfrac{6}{4}$ qui est égal à la moitié de 3 c-à-d $\dfrac{3}{2}$. Ce nombre est décimal et son écriture décimale est 1,5. La solution de la dernière équation est le nombre $\dfrac{2}{7}$. Ce nombre n'est pas décimal. On peut cependant donner une valeur décimale approchée (0,286 au millième près).

	Énoncé	Commentaires
19	Complète.  $3 \times \ldots = 5$	On pourra poser des questions qui convoquent explicitement plusieurs registres.
20	Complète. $\ldots \times 7 = 5$	On cherche toujours le nombre qui multiplié par 7 donne 5 même si la forme de l'équation est différente par rapport aux questions précédentes.
21	Complète si possible. $3 \times \ldots = 0$ $0 \times \ldots = 3$	Des automatismes naissants conduiront certains élèves à proposer $\frac{3}{0}$ comme solution de la seconde équation. On revient au sens. Cette question vise à inhiber un automatisme étendu à une situation ou celui-ci est incorrect.
22	Lis le nombre $\frac{7}{3}$ de deux manières.	On attend « sept tiers », « le tiers de sept », « 7 divisé par 3 » (ou encore « le nombre qui multiplié par 3 donne 7 » ou le quotient de 3 par 7). « Le nombre qui multiplié par 3 donne 7 » est plus naturellement mobilisable avec des questions les équations à trou. « le quotient de 3 par 7 » n'est pas encore nécessairement porteur de sens, il faut l'expliciter.
23	Donne, si possible, différentes écritures des nombres suivants : le quart de 6 18 tiers le tiers de 5 le quotient de 9 par 4	• $\frac{6}{4}$. Le quart de 6, c'est la moitié de 3 c-à-d $\frac{3}{2}$. La moitié de 3 peut aussi s'écrire 1,5. • 18 tiers peut s'écrire $\frac{18}{3}$, c'est aussi le tiers de 18 c-à-d 6. • Le tiers de 5 peut s'écrire $\frac{5}{3}$. Ce nombre n'est pas décimal. On peut donner d'autres écritures fractionnaires ($\frac{10}{6}$ par exemple) • $\frac{9}{4}$. Le quart de 9 est aussi la moitié de 4,5 c'est à dire 2,25 qui est l'écriture décimale de ce nombre.

	Énoncé	Commentaires
24	Donne, si possible, l'écriture décimale des nombres suivants : $\dfrac{21}{7} \quad \dfrac{5}{3} \quad \dfrac{12}{3} \quad \dfrac{21}{4}$	• $\dfrac{21}{7}$ est le septième de 21 donc $\dfrac{21}{7} = 21 \div 7 = 3$ • $\dfrac{5}{3}$ est le tiers de 5. Ce nombre n'est pas décimal. • $\dfrac{12}{3}$ est le tiers de 12 donc $\dfrac{12}{3} = 12 \div 3 = 4$. • $\dfrac{21}{4}$ est le quart de 21 donc la moitié de 10,5 donc $\dfrac{21}{4} = 5{,}25$. ou $\dfrac{21}{4} = \dfrac{20}{4} + \dfrac{1}{4} = 5 + 0{,}25 = 5{,}25$ (ces écritures sont la traduction dans le registre symbolique de 21 quarts est égal à 20 quarts + 1 quart ou le quart de 21 est égal au quart de 20 + le quart de 1).
25	Complète. $\dfrac{\ldots}{7} = 4$	
26	Complète. $\dfrac{36}{\ldots} = 9$	