Coloration de graphe

méthodes et applications

Laurent Moalic

UHA

Institut IRIMAS

laurent.moalic@uha.fr

Avant-propos

Remerciements

Je tiens à remercier ici **Alexandre Gondran**, pour les travaux que nous menons ensemble en coloration de graphe, ainsi pour l'élaboration de ce jeu de diapos.

La version originale se trouve à l'adresse suivante :
`http://www.laas.fr/files/MOGISA/Gondran-20120404.pdf`

Plan

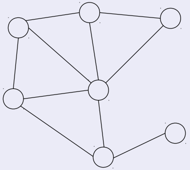
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

graphe $G = (V, E)$



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

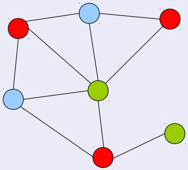
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

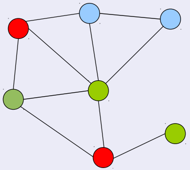
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration non légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

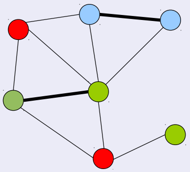
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

arêtes en conflit



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

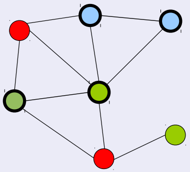
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

sommets en conflit



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

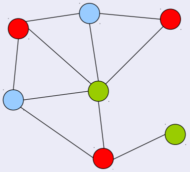
V : ensemble des sommets

E : ensemble des arêtes

k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

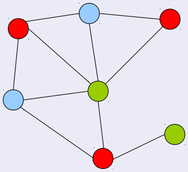
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

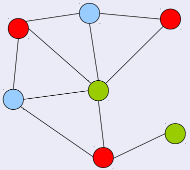
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

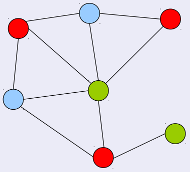
V : ensemble des sommets

E : ensemble des arêtes

k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

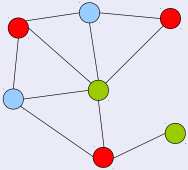
k-coloration du graphe $G = (V, E)$

k-coloration de G

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Problèmes

- Problème de coloration de graphe : trouver $\chi(G)$

$\Rightarrow$ NP-difficile

- Problème de k-coloration : pour k donné, G est-il k-coloriable ?

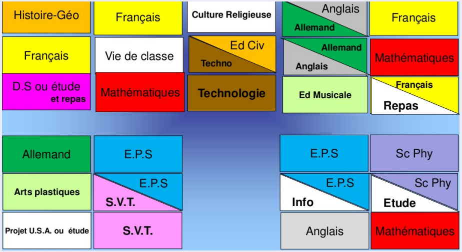
$\Rightarrow$ NP-complet (pour $k > 2$)

Plan

Applications : allocation de ressources *rares*

Emplois du temps

Allocation de créneaux horaires à des événements : cours, examens...



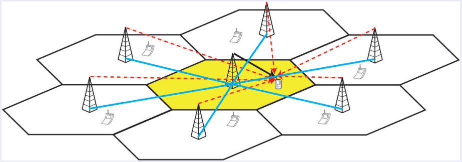
- Sommets : les événements
- Arêtes : les contraintes; deux événements ne peuvent se dérouler simultanément
- Couleurs : les créneaux horaires

$\Rightarrow$ Minimiser la durée totale des événements

Applications : allocation de ressources *rares*

Allocation de fréquences dans les réseaux GSM

Attribuer aux antennes relais des bandes de fréquences pour communiquer avec les usagers.



- Sommets : les antennes relais
- Arêtes : entre deux antennes trop proches géographiquement l'une de l'autre (niveau d'interférence trop important)
- Couleurs : les canaux de fréquences radio

⇒ Minimiser le nombre de fréquences utilisées ou pour un nombre de fréquences donné minimiser les interférences

Beaucoup de contraintes supplémentaires sur les interférences et la qualité de service

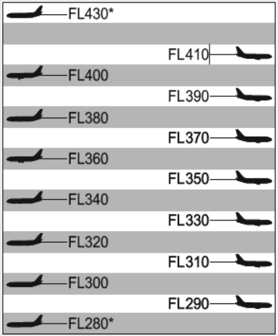
Applications : allocation de ressources *rares*

Allocation de niveaux de vol

Attribuer un niveau de vol aux avions pour éviter les conflits aériens.

- Sommets : les avions
- Arêtes : entre deux avions en conflits (ne respectant pas les distances de sécurité)
- Couleurs : les niveaux de vol

⇒ Minimiser le nombre de niveaux de vol utilisés

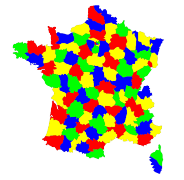


Applications : allocation de ressources *rares*

Coloration de carte géographique

- Sommets : les départements
- Arêtes : entre deux départements frontaliers

⇒ colorier en 4 couleurs



Sudoku, carré latin...

Compléter une grille de sudoku

- Sommets : les cases de la grille
- Arêtes : entre deux cases de la même ligne, même colonne et même carré
- Couleurs : les numéros

⇒ Existence d'une solution à partir d'une solution partielle

9			1					5
		5		9		2		1
8				4				
				8				
			7					
				2	6			9
2			3					6
			2			9		
		1	9		4	5	7	

Plan

1. Quelques définitions
2. Quelques applications
3. **Principales méthodes de résolution**
    1. **Stratégies de résolution**
    2. Principales approches

Stratégies de résolution

Définir l'espace de recherche

- Nombre de couleurs disponibles k est fixe ou pas
- Solutions légales ou non légales
- Solutions complètes ou partielles

4 stratégies principales [Galinier et Hetz 06]

- **Stratégies légales** : solutions légales et k non fixé
- **Stratégies légales partielles et à k fixe** : solutions partielles et légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation à k fixe** : solutions non légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation** : solutions non légales et k non fixé

Stratégies de résolution

Définir l'espace de recherche

- Nombre de couleurs disponibles k est fixe ou pas
- Solutions légales ou non légales
- Solutions complètes ou partielles

4 stratégies principales [Galinier et Hetz 06]

- **Stratégies légales** : solutions légales et k non fixé

$$\begin{aligned} minimiser \quad & k \\ s.c. \quad & \text{contraintes} \\ & \text{solutions complètes} \end{aligned}$$

- **Stratégies légales partielles et à k fixe** : solutions partielles et légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation à k fixe** : solutions non légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation** : solutions non légales et k non fixé

Stratégies de résolution

Définir l'espace de recherche

- Nombre de couleurs disponibles k est fixe ou pas
- Solutions légales ou non légales
- Solutions complètes ou partielles

4 stratégies principales [Galinier et Hetz 06]

- **Stratégies légales** : solutions légales et k non fixé
- **Stratégies légales partielles et à k fixe** : solutions partielles et légales et k fixé

$$\begin{array}{rl} \textit{minimiser} & \text{nbre de sommets non coloriés} \\ \textit{s.c.} & \text{contraintes} \\ & k \text{ couleurs max} \end{array}$$

- **Stratégies de pénalisation à k fixe** : solutions non légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation** : solutions non légales et k non fixé

Stratégies de résolution

Définir l'espace de recherche

- Nombre de couleurs disponibles k est fixe ou pas
- Solutions légales ou non légales
- Solutions complètes ou partielles

4 stratégies principales [Galinier et Hetz 06]

- **Stratégies légales** : solutions légales et k non fixé
- **Stratégies légales partielles et à k fixe** : solutions partielles et légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation à k fixe** : solutions non légales et k fixé

$$\begin{array}{rl} \textit{minimiser} & \text{nbre de contraintes violées} \\ s.c. & \text{solutions complètes} \\ & k \text{ couleurs max} \end{array}$$

- **Stratégies de pénalisation** : solutions non légales et k non fixé

Stratégies de résolution

Définir l'espace de recherche

- Nombre de couleurs disponibles k est fixe ou pas
- Solutions légales ou non légales
- Solutions complètes ou partielles

4 stratégies principales [Galinier et Hetz 06]

- **Stratégies légales** : solutions légales et k non fixé
- **Stratégies légales partielles et à k fixe** : solutions partielles et légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation à k fixe** : solutions non légales et k fixé
- **Stratégies de pénalisation** : solutions non légales et k non fixé

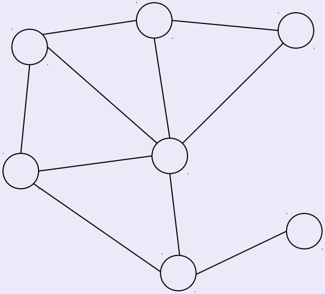
$$\begin{array}{rl} \textit{minimiser} & \text{nbre de contraintes violées et } k \\ s.c. & \text{solutions complètes} \end{array}$$

Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07] Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Graphe simple



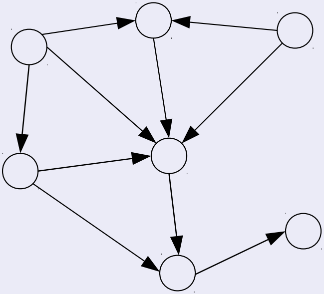
Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]
  Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Graphe avec une orientation sans cycle

Couleurs numérotées



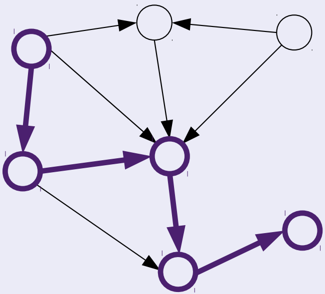
Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]
  Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Plus long chemin : 5 sommets ⇒ coloration en 5 couleurs

Couleurs numérotées



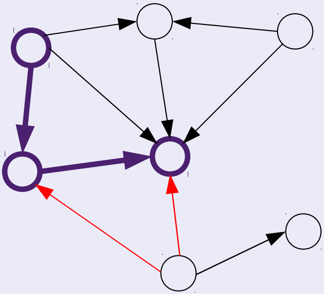
Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]
  Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Plus long chemin : 3 sommets ⇒ coloration en 3 couleurs

Couleurs numérotées



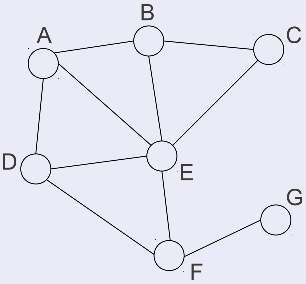
Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]
  Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Couleurs numérotées

Ordre de coloration des sommets
Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible



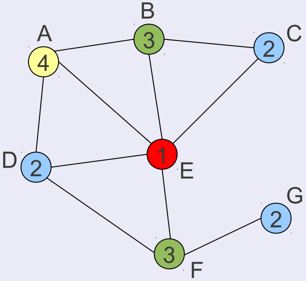
Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]
  Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Couleurs numérotées

Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible
Ordre de coloration des sommets :
$E \to D \to C \to B \to A \to F \to G$
$\Rightarrow$ coloration en 4 couleurs



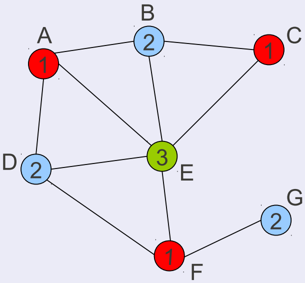
Stratégies de résolution

Autres stratégies

- **Orientation relative des sommets** - graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]
  Théorème [Vitaver 62]: la longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.
- **Orientation totale des sommets** - [Davis 91]

Couleurs numérotées

Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible
Ordre de coloration des sommets :
$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$
$\Rightarrow$ coloration en 3 couleurs



Plan

1. Quelques définitions
2. Quelques applications
3. **Principales méthodes de résolution**
    1. Stratégies de résolution
    2. **Principales approches**

Méthodes de résolution - Principales approches

Quatre principales approches

1. **Méthodes constructives** :
méthodes gloutonnes, évaluations et séparations, recherches arborescentes, programmation par contraintes...
2. **Recherches locales ou par voisinage** :
descentes, recuits simulés, méthodes tabou...
3. **Approches d'évolution ou à population** :
algorithmes génétiques, stratégies d'évolution...
4. **Hybridation** :
combinaison évolution + RL, PPC + RL...

Méthodes de résolution - Principales approches

Quatre principales approches

1. **Méthodes constructives** :
   méthodes gloutonnes, évaluations et séparations, recherches arborescentes, programmation par contraintes...
2. **Recherches locales ou par voisinage** :
   descentes, recuits simulés, méthodes tabou...
3. **Approches d'évolution ou à population** :
   algorithmes génétiques, stratégies d'évolution...
4. **Hybridation** :
   combinaison évolution + RL, PPC + RL...

Méthodes de résolution - Principales approches

Quatre principales approches

1. **Méthodes constructives** :
   méthodes gloutonnes, évaluations et séparations, recherches arborescentes, programmation par contraintes...
2. **Recherches locales ou par voisinage** :
   descentes, recuits simulés, méthodes tabou...
3. **Approches d'évolution ou à population** :
   algorithmes génétiques, stratégies d'évolution...
4. **Hybridation** :
   combinaison évolution + RL, PPC + RL...

Méthodes de résolution - Principales approches

Quatre principales approches

1. **Méthodes constructives** :
   méthodes gloutonnes, évaluations et séparations, recherches arborescentes, programmation par contraintes...
2. **Recherches locales ou par voisinage** :
   descentes, recuits simulés, méthodes tabou...
3. **Approches d'évolution ou à population** :
   algorithmes génétiques, stratégies d'évolution...
4. **Hybridation** :
   combinaison évolution + RL, PPC + RL...

Plan

1. Quelques définitions
2. Quelques applications
3. **Principales méthodes de résolution**
   1. Stratégies de résolution
   2. **Principales approches**
      - **Méthodes constructives**
      - Recherches locales ou à voisinage
      - Approches d'évolution ou à population
      - Hybridation

Méthodes constructives

Approches exactes

- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]

Méthodes constructives

Approches exactes

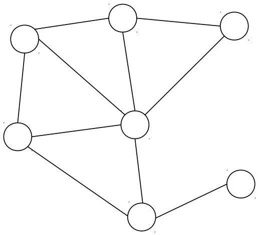
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

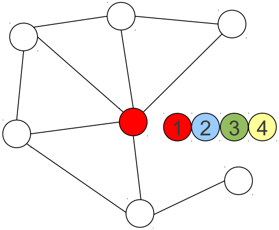
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

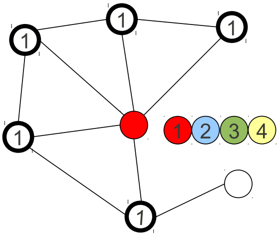
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

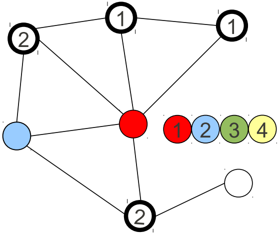
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

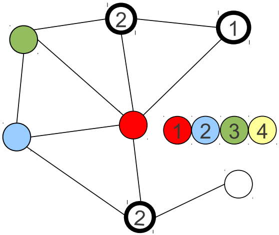
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

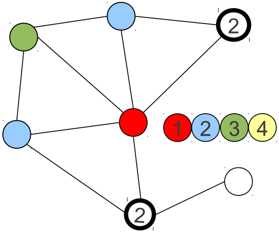
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

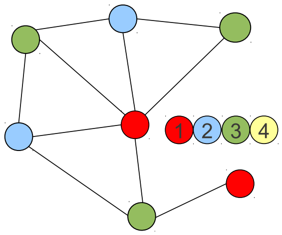
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

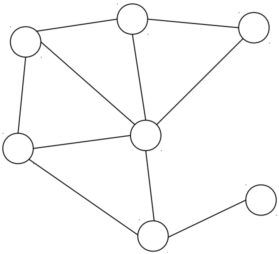
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

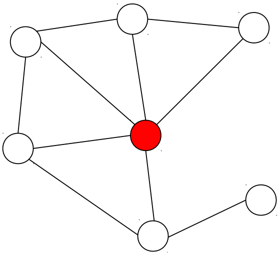
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

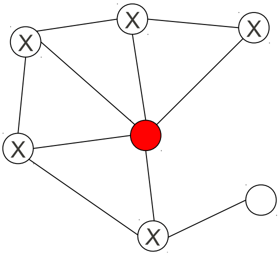
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

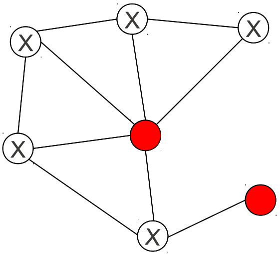
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

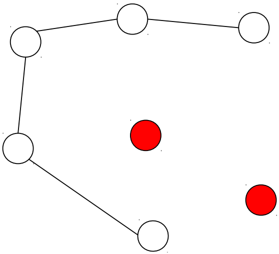
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

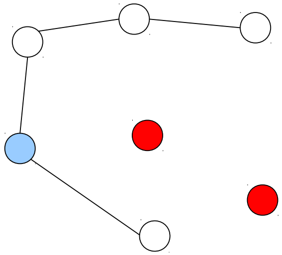
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

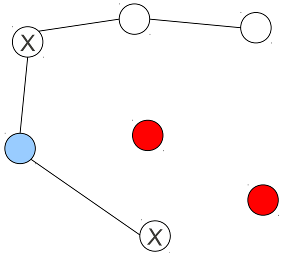
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

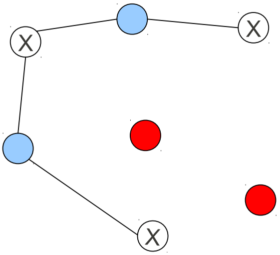
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

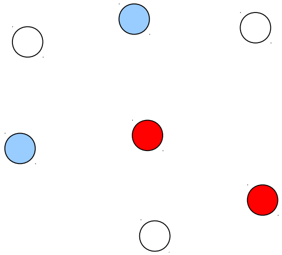
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

⇒ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

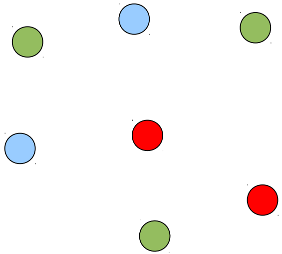
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



Méthodes constructives

Approches exactes

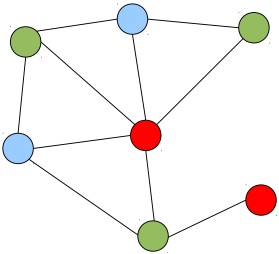
- Méthode par séparation et évaluation très performante pour de petits graphes [Caramia et Dell'Olmo 02]
- Problème NP-difficile

$\Rightarrow$ Impossibilité de colorier de manière exacte des graphes aléatoires de densité 0.5 et de plus de 100 sommets [Johnson et al. 91]

Méthodes gloutonnes

Ordre de coloration des sommets

- statique
- dynamique
  - DSATUR [Brélaz 79]
  - RLF (Recursive-Large-First) [Leighton 79]



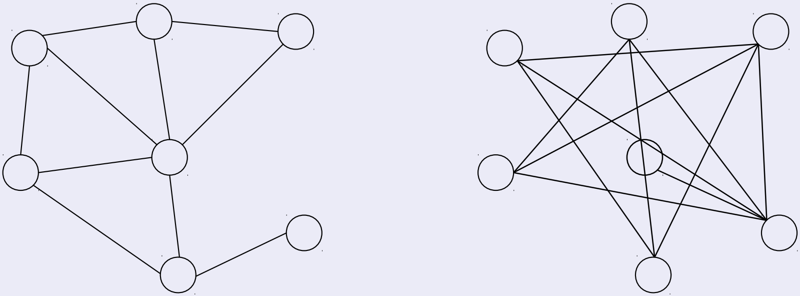
Extraction de stables de taille maximale

Problème connexe : rechercher des stables de taille maximale

Extraction successive de stables de taille maximale

- recherche d'un stable de taille maximale ⇔ recherche d'une clique de taille maximale (dans le graphe complémentaire)

⇒ tous les deux NP-difficiles



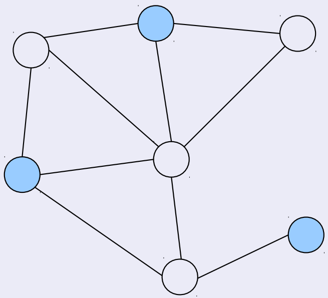
Extraction de stables de taille maximale

Problème connexe : rechercher des stables de taille maximale

Extraction successive de stables de taille maximale

- recherche d'un stable de taille maximale $\Leftrightarrow$ recherche d'une clique de taille maximale (dans le graphe complémentaire)

$\Rightarrow$ tous les deux NP-difficiles



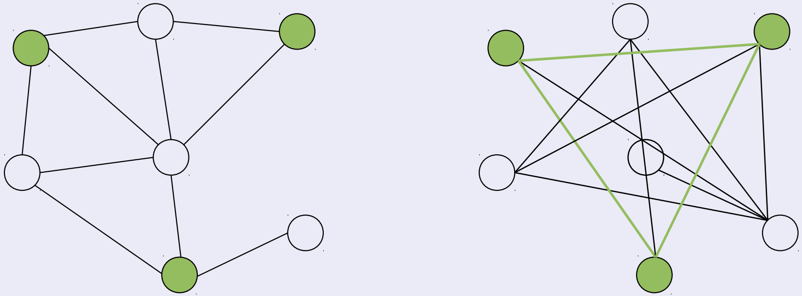
Extraction de stables de taille maximale

Problème connexe : rechercher des stables de taille maximale

Extraction successive de stables de taille maximale

- recherche d'un stable de taille maximale $\Leftrightarrow$ recherche d'une clique de taille maximale (dans le graphe complémentaire)

$\Rightarrow$ tous les deux NP-difficiles



Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

⇒ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

⇒ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

⇒ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

$\Rightarrow$ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

⇒ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

$\Rightarrow$ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

⇒ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Extraction de stables de grande taille

XRLF [Johnson et al. 91]

Idée : hybrider séquentiellement un RLF randomisé avec une méthode exacte

1. RLF randomisé jusqu'à ce que le nombre de sommets non coloriés inférieur à 70
2. Méthode exacte de séparation et évaluation

⇒ Bons résultats pour l'époque sur certains graphes DIMACS difficiles

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

Idée : réduire la taille du graphe en extrayant un ensemble de stables.

1. Générer un pool de stables de tailles p par une méthode Tabou (Adaptive Tabu Search, ATS)
2. Sélectionner dans ce pool un ensemble maximal de stables disjoints deux à deux (toujours par ATS)
3. Réitérer les étapes 1 et 2 tant que le nombre de sommets non coloriés >1000
4. Colorier le graphe résiduel (<1000 sommets) avec une heuristique performante

Plan

1. Quelques définitions
2. Quelques applications
3. **Principales méthodes de résolution**
    1. Stratégies de résolution
    2. **Principales approches**
       - Méthodes constructives
       - **Recherches locales ou à voisinage**
       - Approches d'évolution ou à population
       - Hybridation

Recherches locales ou à voisinage

Éléments de base

- Voisinage : fonction qui perturbe une solution $s \in S$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} : S & \rightarrow & 2^S \\ s & \mapsto & \mathcal{N}(s) \subset S \end{array}$$

- Fonction d'évaluation
  objectif initial + (pénalité) + (autres fonctions)
- Stratégie de mouvement

Quel espace de recherche ?

- k fixé ou non
- Solutions légales ou non, partielles ou non

Stratégies des méthodes locales [Galinier et Hetz 06]

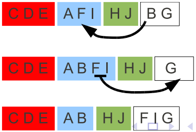
Search space	*k* not fixed		*k* fixed	
	legal colorings	colorings	*k*-colorings	partial legal *k*-colorings
Objective function	$-\sum_{i=1}^{k} \|V_i\|^2$	$\sum_{i=1}^{k} \|V_i\| (2\|E_i\| - \|V_i\|)$	$\sum_{i=1}^{k} \|E_i\|$	$\sum_{v \in V_{k+1}} d(v)$
Neighborhood structure	Kempe chain interchanges	1-moves	critical 1-moves	*i*-swaps Kempe chain interchanges
Authors	Morgenstern and Shapiro (1988) Johnson et al. (1991)	Johnson et al. (1991)	Chams et al. (1987) Hertz and de Werra (1987) Johnson et al. (1991)	Morgenstern (1996) Bloechliger and Zufferey (2003)
Search strategy	legal	penalty	*k*-fixed penalty	*k*-fixed partial legal

1-move

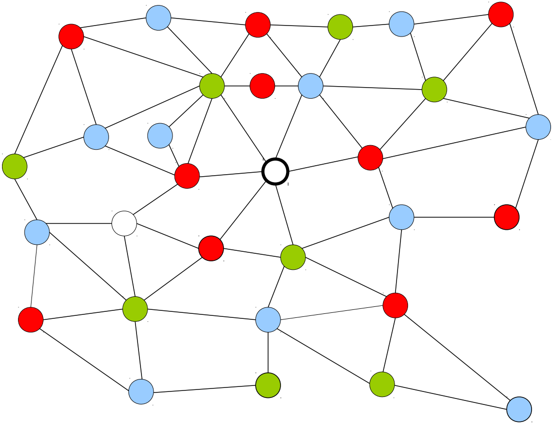
Stratégies des méthodes locales [Galinier et Hetz 06]

Search space	*k* not fixed		*k* fixed	
	legal colorings	colorings	*k*-colorings	partial legal *k*-colorings
Objective function	$-\sum_{i=1}^{k} \lvert V_i \rvert^2$	$\sum_{i=1}^{k} \lvert V_i \rvert (2\lvert E_i \rvert - \lvert V_i \rvert)$	$\sum_{i=1}^{k} \lvert E_i \rvert$	$\sum_{v \in V_{k+1}} d(v)$
Neighborhood structure	Kempe chain interchanges	1-moves	critical 1-moves	*i*-swaps Kempe chain interchanges
Authors	Morgenstern and Shapiro (1988) Johnson et al. (1991)	Johnson et al. (1991)	Chams et al. (1987) Hertz and de Werra (1987) Johnson et al. (1991)	Morgenstern (1996) Bloechliger and Zufferey (2003)
Search strategy	legal	penalty	*k*-fixed penalty	*k*-fixed partial legal

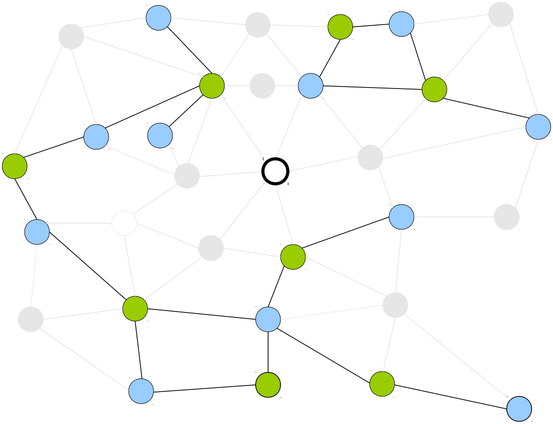
i-swap



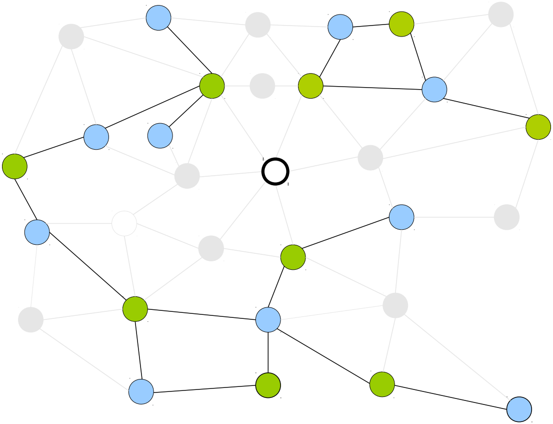
Interchange fondée sur les chaînes de Kempe



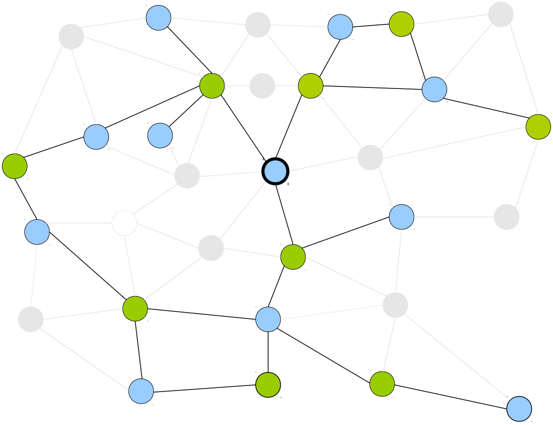
Interchange fondée sur les chaînes de Kempe



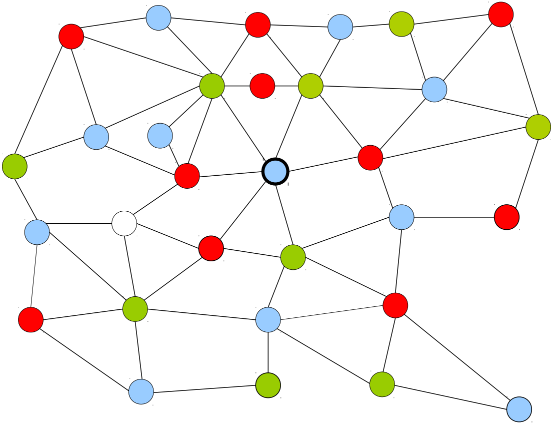
Interchange fondée sur les chaînes de Kempe



Interchange fondée sur les chaînes de Kempe



Interchange fondée sur les chaînes de Kempe



Algorithme TabuCol [Hertz et de Werra 87]

Éléments de base

- Voisinage : 1-moves critiques
- Fonction d'évaluation : minimiser le nombre de contraintes violées
- Stratégie de mouvement : mouvement vers le meilleur de tous les voisins non tabous (même s'il dégrade la fonction objectif)

Liste tabou

- Le mouvement inverse
- Durée tabou **dynamique** dépends de la taille du voisinage

Structure de données et rapidité des algorithmes

- Différences entre [Hertz et de Werra 87] et [Galiner et Hao 99]
- Évaluation incrémentale [Fleurent et Ferland 96]

δ-évaluation

A	+1	X	-2	0
B	-1	+1	X	-1
C	X	0	-2	+1
D	-2	X	-1	+2

liste tabou (iter=21)

A	15	0	43	20
B	6	34	7	13
C	0	23	10	7
D	32	17	21	0

Plan

1. Quelques définitions
2. Quelques applications
3. **Principales méthodes de résolution**
    1. Stratégies de résolution
    2. **Principales approches**
       - Méthodes constructives
       - Recherches locales ou à voisinage
       - **Approches d'évolution ou à population**
       - Hybridation

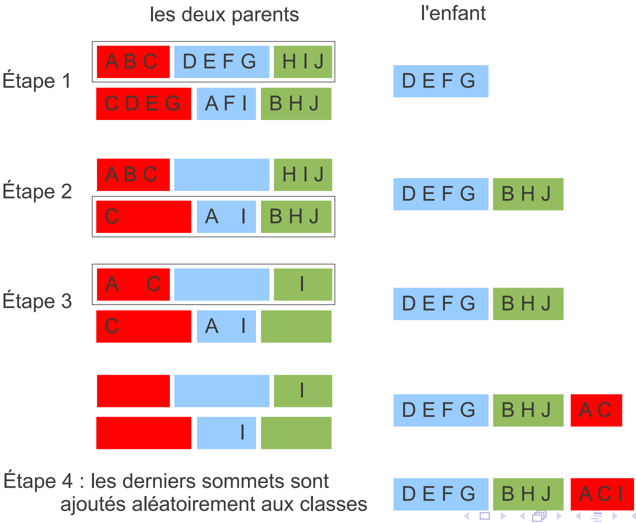
Approches d'évolution ou à population

Les principales caractéristiques

- Une population d'individus (solutions)
- Un opérateur de sélection des parents
- Un opérateur de croisement :
  GPX - Greedy Pertition Crossover [Galinier et Hao 99] fondé sur les classes de couleurs
- Un opérateur de mutation
- Une stratégie de remplacement
- Un critère d'arrêt

Greedy Pertition Crossover dans HEA [Galinier et Hao 99]

- Stratégie de pénalisation à k fixe
- Idée : les classes de grand cardinal doivent être transmises à l'enfant.



GPX et améliorations

Adaptative Multi-Parent Crossover (AMPaX) [Lu et Hao 11, MACOL]

- Croisement avec $m \geqslant 2$ parents
- Sélectionner à chaque étape, la plus grande classe parmi tous les parents
- Un parent sélectionné est tabou pendant les $m/2$ étapes suivantes

AMACOL [Galinier et al. 08]

- Population de solutions partielles, légales à k fixe $\sim$ pool de stables
- Construction d'une k-coloration en combinant k stables du pool + colorier les sommets non présents dans les stables
- Améliorer la k-coloration par recherche locale (Tabucol)
- Décomposer la k-coloration en stables à incorporer dans le pool

GPX et améliorations

Adaptative Multi-Parent Crossover (AMPaX) [Lu et Hao 11, MACOL]

- Croisement avec $m \geqslant 2$ parents
- Sélectionner à chaque étape, la plus grande classe parmi tous les parents
- Un parent sélectionné est tabou pendant les $m/2$ étapes suivantes

AMACOL [Galinier et al. 08]

- Population de solutions partielles, légales à k fixe $\sim$ pool de stables
- Construction d'une k-coloration en combinant k stables du pool + colorier les sommets non présents dans les stables
- Améliorer la k-coloration par recherche locale (Tabucol)
- Décomposer la k-coloration en stables à incorporer dans le pool

Plan

1. Quelques définitions
2. Quelques applications
3. **Principales méthodes de résolution**
    1. Stratégies de résolution
    2. **Principales approches**
       - Méthodes constructives
       - Recherches locales ou à voisinage
       - Approches d'évolution ou à population
       - **Hybridation**

Hybridation

Trois outils à combiner

- Recherche locale :
  élément essentiel pour l'intensification et la reconstruction de solutions
- Algorithme à base de population :
  élément essentiel pour l'exploration globale
- Extraction de stables :
  nécessaire pour les grand graphe (supérieur à 1000 sommets)

Hybridation

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

- Prétraitement avec extraction de stables : fondé sur Adaptive Tabu Search ATS

⇒ utilisation de p couleurs

- Algorithme mémétique MACol [Lu et Hao 10] pour le graphe restant :
  - Croisement : AMPaX
  - Mutation : TabuCol

Distributed Hybrid Quantum Annealing [Titiloye et Crispin 11]

- Recuit quantique : population coopérant en partageant une fonction coût (somme des énergies)
- Recherche locale : recuit simulé adaptatif (rayon du voisinage est aussi contrôlé)

Hybridation

EXTRACOL [Wu et Hao 11]

- Prétraitement avec extraction de stables : fondé sur Adaptive Tabu Search ATS

$\Rightarrow$ utilisation de p couleurs

- Algorithme mémétique MACol [Lu et Hao 10] pour le graphe restant :
  - Croisement : AMPaX
  - Mutation : TabuCol

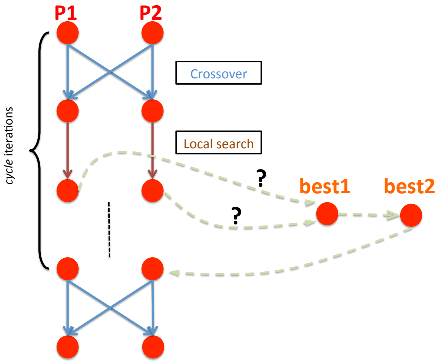
Distributed Hybrid Quantum Annealing [Titiloye et Crispin 11]

- Recuit quantique : population coopérant en partageant une fonction coût (somme des énergies)
- Recherche locale : recuit simulé adaptatif (rayon du voisinage est aussi contrôlé)

HEAD : Optimisation Hybride avec 2 individus pour la coloration de graphe [Moalic et Gondran 18]

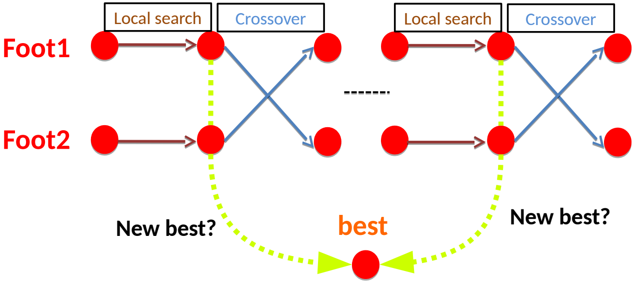
Algorithm 1 *HEAD*

Input: the crossover: GPX, the local search: TabuCol (with $Iter_{TC}$ iterations), $Iter_{cycle} = 10$.
Output: the best configuration found
$p_1, p_2, elite_1, elite_2 \leftarrow$ init() {initialize with random colorings}
$generation \leftarrow 0$
repeat
    $c_1' \leftarrow \text{GPX}(p_1, p_2)$
    $c_2' \leftarrow \text{GPX}(p_2, p_1)$
    $c_1 \leftarrow \text{TabuCol}(c_1')$
    $c_2 \leftarrow \text{TabuCol}(c_2')$
    $elite_1 \leftarrow \text{saveBest}(c_1, c_2, elite_1)$
    $p_1 \leftarrow c_1$
    $p_2 \leftarrow c_2$
    $best \leftarrow \text{saveBest}(elite_1, best)$
    if $generation \% Iter_{cycle} = 0$ **then**
        $p_1 \leftarrow elite_2$
        $elite_2 \leftarrow elite_1$
        $elite_1 \leftarrow$ init()
    end if
    $generation++$
until $nbConflicts > 0$
return $best$



PRTCol : algorithme de la cordée [Moalic et Gondran 17]

- Une approche mémétique parallèle
- Un grimpeur est basé sur l'algorithme *HEAD*
  - 1 grimpeur = 2 pieds $\Rightarrow$ chaque grimpeur est une population de 2 individus
  - Pas d'opérateur de sélection
  - Pas de stratégie de remplacement
- Avantage: une convergence rapide
- !! Danger: une convergence prématurée !!



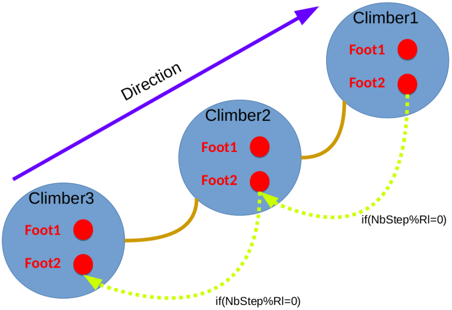
PRTCol : modélisation de la cordée

Lorsque tout va bien

Les grimpeurs avancent et à chaque R_l pas ils transmettent la direction à suivre au marcheur suivant (copie de la position d'un des pieds)

Lorsqu'un grimpeur tombe

- Correspond à 2 individus identiques (pieds à la même position)
- Le croisement n'apporte plus de diversité ⇒ optimum local
- Les grimpeurs précédents et suivants le retiennent en transmettant leur position



⇒ Toutes les LS peuvent se faire simultanément

Conclusions

Revue des méthodes

- Variété des méthodes utilisées :
  - Méthodes constructives
  - Recherches locales
  - Approches à population
  - Hybridations

⇒ Ensemble d'outils complémentaires

⇒ Pas d'algorithme qui domine toutes les autres approches sur tous les graphes

Coloration de graphe

Problème générique

⇒ Réutiliser facilement les idées développées

Axe de travail

- Hybrider optimisation et apprentissage
- Prouver des résultats issus d'heuristiques

Conclusions

Revue des méthodes

- Variété des méthodes utilisées :
  - Méthodes constructives
  - Recherches locales
  - Approches à population
  - Hybridations

$\Rightarrow$ Ensemble d'outils complémentaires

$\Rightarrow$ Pas d'algorithme qui domine toutes les autres approches sur tous les graphes

Coloration de graphe

Problème générique

$\Rightarrow$ Réutiliser facilement les idées développées

Axe de travail

- Hybrider optimisation et apprentissage
- Prouver des résultats issus d'heuristiques

Conclusions

Revue des méthodes

- Variété des méthodes utilisées :
  - Méthodes constructives
  - Recherches locales
  - Approches à population
  - Hybridations

$\Rightarrow$ Ensemble d'outils complémentaires

$\Rightarrow$ Pas d'algorithme qui domine toutes les autres approches sur tous les graphes

Coloration de graphe

Problème générique

$\Rightarrow$ Réutiliser facilement les idées développées

Axe de travail

- Hybrider optimisation et apprentissage
- Prouver des résultats issus d'heuristiques

Références

- Bibliographie de coloration de graphes de Marco Chiarandini (plus de 200 références)
  www.imada.sdu.dk/ marco/gcp/

- Philippe Galinier et Alain Hertz
  A survey of local search methods for graph coloring.
  Journal Computers and Operations Research - Volume 33 Issue 9, sept. 2006.

- Philippe Galinier, Jean-Philippe Hamiez, Jin-Kao Hao, Daniel Cosmin Porumbel
  Recent advances in graph vertex coloring.
  In I. Zelinka, A. Abraham, V. Snasel (Eds.) Handbook of Optimization. 2012. Springer.

Merci