PUISSANCES

Pour raccourcir $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ on a inventé la multiplication (7×5)
Pour raccourcir $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ on a inventé la puissance (7^5)

On lit :

$3^2 \to$ « 3 au carré » $3^3 \to$ « 3 au cube » $3^4 \to$ « 3 puissance 4 »
$3^5 \to$ « 3 puissance 5 » $3^6 \to$ « 3 puissance 6 » etc…

C'est :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ .... \ \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$	avec n : nombre entier positif
Dans a^n, n est appelé <u>l'exposant</u>	

<u>Exemples :</u>

$10^4 = 10\times10\times10\times10$ $5^6 = 5\times5\times5\times5\times5\times5$ $2^3 = 2\times2\times2$

<u>Donner l'écriture décimale :</u>

$10^5 = 10\times10\times10\times10\times10 = 100\,000$

$2^4 = 2\times2\times2\times2 = 4\times4 = 16$

$(-3)^2 = (-3)\times(-3) = 9$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$

$-3^2 = -3\times3 = -9$

$2{,}5\times10^3 = 2{,}5\times1000 = 2\,500$

Cas particuliers :	$a^1 = a$	et	$a^0 = 1$

<u>Exemples :</u>

$275^1 = 275$ $43^1 = 43$ $275^0 = 1$ $43^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ .... \ \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}}$	avec n : nombre entier positif a : nombre non-nul

<u>Exemples :</u>

$10^{-7} = \frac{1}{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10}$ $10^{-2} = \frac{1}{10\times10}$

<u>Donner l'écriture décimale :</u>

$$10^{-5} = \frac{1}{10\times10\times10\times10\times10} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}00001$$

$$2{,}5\times10^{-3} = 2{,}5 \times \frac{1}{10\times10\times10} = 2{,}5 \times \frac{1}{1000} = 2{,}5 \div 1000 = 0{,}0025$$

Ecriture SCIentifique

C’est l’écriture sous la forme $a \times 10^{n}$	avec a : nombre avec un seul chiffre non-nul avant la virgule n : nombre entier
Sur la calculatrice, le passage en mode « SCI » permet de la trouver rapidement.	

Donner l’écriture scientifique : $3245 = 3{,}245 \times 10^{3}$ $0{,}000048 = 4{,}8 \times 10^{-5}$

Puissances de dix et préfixes du système d’unités

10^n	Nombre décimal	Désignation	Préfixe français	Symbole	Exemple (ordre de grandeur)
10^{12}	1 000 000 000 000	Billion	téra	T	TW : térawatt (puissance d’une centrale nucléaire)
10^{9}	1 000 000 000	Milliard	giga	G	Go : gigaoctet (capacité d’un smartphone)
10^{6}	1 000 000	Million	méga	M	Mm : mégaoctet (rayon de la Lune)
10^{3}	1 000	Millier	kilo	k	kg : kilogramme (poids d’un bébé)
10^{2}	100	Centaine	hecto	h	hm : hectomètre (taille d’un terrain de football)
10^{1}	10	Dizaine	déca	da	dam : décamètre (au foot, distance entre le point de penalty et le but)
10^{0}	1	Unité	*(aucun)*	*(aucun)*	
10^{-1}	0,1	Dixième	déci	d	dm : décimètre (diamètre d’une orange)
10^{-2}	0,01	Centième	centi	c	cm : centimètre (taille d’une guêpe)
10^{-3}	0,001	Millième	milli	m	mL : millilitre (contenance d’une cuillère à café)
10^{-6}	0,000 001	Millionième	micro	µ	µm : micromètre (taille d’une bactérie)
10^{-9}	0,000 000 001	Milliardième	nano	n	nm : nanomètre (taille d’un virus)
10^{-12}	0,000 000 000 001	Billionième	pico	p	pm : picomètre (distance entre deux atomes dans une molécule)

Quotient de puissances

On remarque que, si on utilise la définition :

$$\frac{5^6}{5^4} = \frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times 5\times 5}{\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}} = 5^2$$

(on simplifie par 5… il y en a moins !)

$$\boxed{\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2}$$

Ecrire sous la forme a^{n} :

$$\frac{8^7}{8^3} = \frac{\cancel{8}\times\cancel{8}\times\cancel{8}\times 8\times 8\times 8\times 8}{\cancel{8}\times\cancel{8}\times\cancel{8}} = 8^4$$

ou

$$\frac{8^7}{8^3} = 8^{7-3} = 8^4$$

$$\frac{10^4}{10^7} = \frac{\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}}{\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times 10\times 10\times 10} = 10^{-3}$$

ou

$$\frac{10^4}{10^7} = 10^{4-7} = 10^{-3}$$

Donner l'écriture décimale :

$$\frac{7\times10^3}{2\times10^5} = \frac{7\times10\times10\times10}{2\times10\times10\times10\times10\times10} = \frac{7}{2}\times\frac{\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}}{\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times10\times10} = 3{,}5\times10^{-2} = 3{,}5\div100 = 0{,}035$$

ou $$\frac{7\times10^3}{2\times10^5} = \frac{7}{2}\times\frac{10^3}{10^5} = 3{,}5\times10^{3-5} = 3{,}5\times10^{-2} = 3{,}5\div100 = 0{,}035$$

Produit de puissances

On remarque que, si on utilise la définition :

$5^6\times5^4 = 5\times5\times5\times5\times5\times5 \times 5\times5\times5\times5 = 5^{10}$ *(on compte tous les 5)* $\boxed{5^6\times5^4 = 5^{6+4} = 5^{10}}$

Ecrire sous la forme a^n :

$10^4\times10^3 = 10\times10\times10\times10\times10\times10\times10 = 10^7$ ou $10^4\times10^3 = 10^{4+3} = 10^7$

$10^6\times10^{-4} = \cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times10\times10\times\frac{1}{\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times\cancel{10}} = 10^2$ ou $10^6\times10^{-4} = 10^{6+(-4)} = 10^2$

Donner l'écriture décimale :

$4\times10^5\times2{,}3\times10^{-2}$
$= 4\times2{,}3\times10^5\times10^{-2}$
$= 9{,}2\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times10\times10\times10\times\frac{1}{\cancel{10}\times\cancel{10}}$
$= 9{,}2\times10^3$
$= 9{,}2\times1\,000$
$= 9\,200$

ou

$4\times10^5\times2{,}3\times10^{-2}$
$= 4\times2{,}3\times10^5\times10^{-2}$
$= 9{,}2\times10^{5+(-2)}$
$= 9{,}2\times10^3$
$= 9{,}2\times1\,000$
$= 9\,200$

Ecrire sous la forme 10^n :

Un milliard de million = $10^9\times10^6 = 10^{9+6} = 10^{15}$
Un million de milliard<u>ième</u> = $10^6\times10^{-9} = 10^{6+(-9)} = 10^{-3}$

Puissances de puissances

On remarque que, si on utilise la définition :

$(5^6)^4 = 5^6\times5^6\times5^6\times5^6 = 5^{6+6+6+6} = 5^{24}$ $\boxed{(5^6)^4 = 5^{6\times4} = 5^{24}}$

Ecrire sous la forme a^n :

$(10^4)^3 = 10^4\times10^4\times10^4 = (10\times10\times10\times10)\times(10\times10\times10\times10)\times(10\times10\times10\times10) = 10^{12}$

ou $(10^4)^3 = 10^{4\times3} = 10^{12}$

Puissances d'un produit

On remarque que, si on utilise la définition :

$(2 \times 5)^3 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) = 2^3 \times 5^3$

Réduire :

$(3 \times a)^2 = (3 \times a) \times (3 \times a) = (3 \times 3) \times (a \times a) = 3^2 \times a^2 = 9a^2$